SIC3601 : TD numéro 5

Pour les signaux aléatoires :

$\boxed{1}$ la stationnarité au sens strict entraîne la stationnarité au sens large.

$\boxed{2}$ la stationnarité au sens strict entraîne l'ergodicité.

$\boxed{3}$ la stationnarité au sens large entraîne la stationnarité au sens strict.

$\boxed{4}$ la stationnarité au sens large et au sens strict entraînent l'ergodicité.

Exercice 1: stationnarité, ergodicité, bruit blanc (temps discret)

1. Soit le signal aléatoire (complexe) à temps discret $x_n = e^{\mathrm{i}(\omega n+\phi)}$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et ϕ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$.

(a) Calculer $\mathbb{E}\{x_n\}$ et $\mathbb{E}\{x_n x_{n-k}^*\}$. Que dire de la stationnarité ? Que vaut l'auto-corrélation $\gamma_x(k)$ du signal x_n ?

(b) Calculer :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n \quad \text{et :} \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x_n x_{n-k}^*$$

Que peut-on dire concernant l'ergodicité ?

2. On considère maintenant le signal $y_n = e^{\mathrm{i}(\omega_1 n+\phi_1)} + e^{\mathrm{i}(\omega_2 n+\phi_2)}$ où ω_1, ω_2 sont fixés dans $\mathbb{R}$ et ϕ_1, ϕ_2 sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, 2\pi]$.

(a) y_n est-il stationnaire ? Calculer $\mathbb{E}\{y_n\}$ et $\gamma_y(k) \triangleq \mathbb{E}\{y_n y_{n-k}^*\}$.

(b) Calculer la puissance de y_n.

3. Soit le signal $z_n = y_n + e_n$ où e_n est un bruit blanc centré, indépendant de y_n et de puissance σ_e^2. Calculer la puissance, la moyenne et l'autocorrélation de z_n.

Exercice 2: prédiction linéaire Pour des variables aléatoires réelles de carré sommable, on définit le produit scalaire par :

$$\langle X, Y\rangle \triangleq \mathbb{E}\{XY\}$$

où $\mathbb{E}\{.\}$ désigne l'espérance mathématique. On considère $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un signal aléatoire réel, centré, stationnaire au sens large, et dont la fonction d'autocorrélation $(R_x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est supposée connue. Soient enfin n et m fixés, $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$. Cet exercice a pour but, dans deux cas particuliers, de déterminer une prédiction de x_n, notée $\hat{x}_n$, qui minimise l'erreur quadratique :

$$\mathcal{E} \triangleq \mathbb{E}\{(\hat{x}_n - x_n)^2\} \tag{1}$$

1. Nous recherchons dans un premier temps $\hat{x}_n$ comme la meilleure prédiction linéaire de x_n à partir de x_{n-m} ; c'est-à-dire que l'on cherche $\hat{x}_n$ sous la forme : $\hat{x}_n = \lambda x_{n-m}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Exprimer l'erreur $\mathcal{E}$ de l'équation (1) sous la forme d'un polynôme du second degré en λ. En déduire la valeur optimale de λ permettant de minimiser l'erreur quadratique ainsi que l'expression de $\hat{x}_n$ correspondante.

(b) Retrouver le résultat précédent en interprétant $\mathcal{E}$ comme une norme au carré et $\hat{x}_n$ comme une projection orthogonale.

2. Nous cherchons maintenant $\hat{x}_n$ comme la meilleure prédiction linéaire de x_n à partir des $x_{n-k}, k = 1, \ldots, m$, c'est à dire que $\hat{x}_n$ s'écrit : $\hat{x}_n = \sum_{k=1}^{m} a_k x_{n-k}$ où les coefficients $a_k, k = 1, \ldots, m$ sont réels.

(a) En vous inspirant de la question 1b, montrer que les coefficients $a_k, k = 1, \ldots, m$ satisfont :

$$\forall l \in \{1, \ldots, m\} \qquad \sum_{k=1}^{m} a_k R_x(k-l) = R_x(l).$$

(b) En déduire que les $a_k, k = 1, \ldots, m$ sont solutions d'un système linéaire qui s'écrit sous la forme (on précisera les valeurs de $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}, c_m$) :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-1} \\ c_1 & c_0 & \ddots & c_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{m-1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$