

SIC3601 : TD numéro 1



Soit $x(t)$ un signal et $X(f)$ sa transformée de Fourier (ce que l'on note par : $x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(f)$). Alors :

$$\boxed{1} \quad x(t)e^{i2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TF}} X(f - f_0)$$

$$\boxed{2} \quad x(t + t_0) \xrightarrow{\text{TF}} X(f t_0)$$

$$\boxed{3} \quad x(at) \xrightarrow{\text{TF}} aX(af)$$

$$\boxed{4} \quad \text{si } x(t) \text{ est réel, alors } X(f) = X(-f)^*.$$

Exercice 1: inégalité de Heisenberg Dans tout l'exercice, on considère un signal déterministe $x(t)$ d'énergie finie ($t \in \mathbb{R}$ représente le temps). On supposera que ce signal est dérivable, que $x'(t)$ est d'énergie finie et que $tx(t)$ est d'énergie finie.

- (a) Préciser comment s'énonceraient les hypothèses ci-dessus dans le langage du cours de mathématiques. En admettant qu'elles existent, préciser les limites de $t|x(t)|^2$ pour $t \rightarrow +\infty$ et $t \rightarrow -\infty$.

(b) On note E_x l'énergie du signal $x(t)$. Rappeler la définition de E_x .

- On définit :

$$t_0 \triangleq \int_{\mathbb{R}} t \frac{|x(t)|^2}{E_x} dt \quad \text{et} \quad T \triangleq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 \frac{|x(t)|^2}{E_x} dt}$$

En faisant une analogie avec les probabilités, justifier que l'on puisse dire que t_0 est le «temps moyen du signal». Interpréter T (appelé parfois «durée quadratique moyenne»).

Dans la suite de l'énoncé, on supposera $t_0 = 0$.

- On note $X(f)$ la transformée de Fourier de $x(t)$ (f désigne la fréquence) et on fait l'hypothèse que $\int_{\mathbb{R}} f|X(f)|^2 df = 0$.

En utilisant la relation de Parseval, donner l'expression de E_x en fonction de $X(f)$. Interpréter la quantité B introduite ci-dessous (et appelée parfois de «bande quadratique moyenne occupée») :

$$B \triangleq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2 \frac{|X(f)|^2}{E_x} df}$$

- Rappeler comment s'écrit la transformée de Fourier de $x'(t)$ en fonction de $X(f)$ et en déduire :

$$\int_{\mathbb{R}} |x'(t)|^2 dt = 4\pi^2 B^2 E_x$$

- En appliquant l'inégalité de Schwarz à $\int_{\mathbb{R}} (tx(t))^* x'(t) dt$ d'une part, et en calculant cette intégrale d'autre part, montrer que $BT \geq \frac{1}{4\pi}$.

- Déterminer les signaux à valeurs réelles d'énergie finie pour lesquels le produit BT est minimum.

- On rappelle la transformée de Fourier $e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\pi f^2}$ et on considère le signal particulier $x(t) = e^{-\pi t^2}$. Calculer E_x , B et T .

Exercice 2: effet d'une troncature Soit le signal

$$x(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer le signal $x(t)$ (pour $T > 1/f_0$). Est-ce un signal d'énergie finie ? de puissance finie ?
2. Calculer la transformée de Fourier de ce signal et tracer son spectre en amplitude.
3. Calculer l'énergie ou la puissance du signal pour la valeur particulière $T = T_0 = 1/f_0$.

Note : Il est suggéré de faire cet exercice sans utiliser la transformée de Fourier des distributions ; on pourra reprendre l'exercice dans le cadre des distributions ultérieurement.