

---

**SIC3601 : TD numéro 8**


---



Un signal sinusoïdal pur de fréquence 418Hz est échantillonné. La durée entre deux échantillons est de 20ms.

- 1 La condition d'échantillonnage de Shannon est respectée.
  - 2 La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et une raie est repliée à 20Hz.
  - 3 La condition d'échantillonnage de Shannon n'est pas respectée. Il y a repliement de spectre et une raie est repliée à 18Hz.
  - 4 La transformée de Fourier à temps discret du signal échantillonné n'est pas définie car la condition d'échantillonnage n'est pas respectée.
- 

**Exercice 1: formule d'interpolation** Dans cet exercice, on suppose  $T > 0$  fixé.

1. Soit, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $s_n$  le signal d'énergie finie ( $s_n \in L^2(\mathbb{R})$ ) défini par sa transformée de Fourier  $S_n$  qui s'écrit :

$$S_n(f) = \begin{cases} \sqrt{T}e^{-i2\pi nTf} & \text{si } f \in [-1/2T, 1/2T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer l'expression temporelle du signal  $s_n$ .

2. On définit dans l'espace des signaux d'énergie finie ( $L^2(\mathbb{R})$ ) le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle \triangleq \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)^* dt$$

Montrer que la famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée dans l'espace des signaux d'énergie finie et à bande limitée  $[-1/2T, 1/2T]$ .

3. Soit  $x$  un signal d'énergie finie et de bande limitée  $[-1/2T, 1/2T]$ . On note  $X$  la transformée de Fourier de  $x$ . On définit une version périodisée de  $X$  par :

$$\begin{cases} \forall f \in ]-1/2T, 1/2T[ & \tilde{X}(f) = X(f) \\ \forall f \in \mathbb{R} & \tilde{X}(f + \frac{1}{T}) = \tilde{X}(f) \end{cases}$$

- (a) Calculer le développement en série de Fourier de  $\tilde{X}$ . On rappelle que dans le cas présent, il s'exprime sous la forme :

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi n f T} \text{ avec pour tout } n \in \mathbb{Z} : c_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \tilde{X}(f) e^{-i2\pi n f T} df$$

- (b) En déduire la relation suivante, appelée formule d'interpolation de Shannon :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi(t - nT)}{T} \right)$$

A partir des questions 2 et 3b on obtient que la famille  $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée des signaux d'énergie finie et de bande limitée  $[-1/2T, 1/2T]$ .

4. Commenter le fait que l'on ait obtenu une formule d'interpolation exacte. Est-ce cohérent avec le «sens physique» ?

---

**Exercice 2: calcul de transformées de Fourier** Cet exercice a pour but de manipuler quelques transformées de Fourier. Le cadre est implicitement celui des distributions tempérées et aucune justification théorique n'est demandée. On note dans cet exercice  $T$  et  $L$  deux réels positifs tels que  $L > T > 0$ .

Soit le signal

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et le signal  $y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(t - kL)$ .

1. Tracer l'allure des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ .
2. Que vaut la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ ?
3. On définit  $\text{III}_L(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kL)$ . Quel est le nom couramment donné à cette distribution?
4. Exprimer  $y(t)$  en fonction de  $x(t)$  et  $\text{III}_L(t)$ . Préciser en français le nom de l'opération mise en jeu dans la formule donnée.
5. Dédurre de la question précédente la transformée de Fourier  $Y(f)$  de  $y(t)$ .
6. Tracer l'allure des transformées de Fourier  $X(f)$  et  $Y(f)$ .
7. Voyez vous une analogie avec un calcul que vous auriez pu déjà faire en physique?
8. Calculer la série de Fourier associée au signal  $L$ -périodique  $y(t)$ .
9. Montrer que les coefficients de Fourier précédents ont déjà été obtenus lors du calcul de  $Y(f)$  à la question 5.