SIC3601 : TD numéro 10

La transformée de Hilbert du signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ (où f_0 est une constante positive) :

$\boxed{1}$ vaut $\widehat{x}(t) = \frac{1}{2}\Big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\Big)$.

$\boxed{2}$ vaut $\widehat{x}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\Big)$.

$\boxed{3}$ vaut $\widehat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.

$\boxed{4}$ vaut $\widehat{x}(t) = e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t}$.

Exercice 1: signal modulé à bande étroite, transformée de Fourier Dans cet exercice, le cadre est implicitement celui des distributions tempérées et aucune justification théorique n'est demandée.

1. Soit le signal $p(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Quelle est la transformée de Fourier $P(f)$ de $p(t)$?

2. Soit $m(t)$ un signal à *valeurs réelles* dont la bande de fréquence occupée est $[-B, B]$ avec $B \ll f_0$. On définit $x(t) = m(t)p(t)$. Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$ en fonction de $M(f)$, transformée de Fourier de $m(t)$.

3. Représenter schématiquement l'allure de $X(f)$ en fonction de celle de $M(f)$ (transformée de Fourier de $m(t)$) et préciser la bande occupée par $x(t)$.

4. Comment s'appelle l'opération qui consiste à transformer $m(t)$ en $x(t)$? Comment appelle-t-on un signal comme $x(t)$ dont le spectre occupe une bande B avec $B \ll f_0$?

5. Soit le filtre de réponse en fréquence

$$H_a(f) = \begin{cases} 2 & \text{si } f \geq 0, \\ 0 & \text{si } f < 0. \end{cases}$$

On note $z_m(t)$ le signal obtenu lors du filtrage de $m(t)$ par $H_a(f)$. Comment s'appelle le signal $z_m(t)$? Tracer sommairement son spectre.

6. Donner la réponse impulsionnelle $h_a(t)$ du filtre de réponse en fréquence $H_a(f)$ (calcul non demandé). En déduire que l'on peut écrire $z_m(t) = m(t) + \mathrm{i}\widehat{m}(t)$ où $m(t)$ et $\widehat{m}(t)$ sont les parties réelles et imaginaires de $z_m(t)$. Comment s'appelle le signal $\widehat{m}(t)$?

7. Soit $y(t) = \Re\{z_m(t)e^{\mathrm{i}2\pi f_0 t}\}$. Tracer l'allure du spectre de $y(t)$ et déduire de ce qui précède une expression de $y(t)$ en fonction de $m(t)$ et $\widehat{m}(t)$.

Exercice 2: échantillonnage de l'enveloppe complexe

1. On considère un signal analogique $x(t)$ à bande limitée qui occupe une bande $[-B, B]$.

(a) Quelle est la fréquence minimale à laquelle il est possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ?

(b) On construit le signal $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$ où f_0 est une fréquence fixée et grande par rapport à B.

Calculer la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$ en fonction de $X(f)$, tranformée de Fourier de $x(t)$ (on suppose qu'il n'y a pas de problème d'existence). Représenter schématiquement $Y(f)$ et $X(f)$.

(c) Quelle est la bande $[-C, C]$ occupée par $y(t)$? Si on applique directement le théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage de $y(t)$? Ce résultat vous inspire-t-il un commentaire en comparaison du résultat de la question 1a ?

Nous allons maintenant montrer comment il est possible d'échantillonnner un signal bande étroite à une fréquence inférieure à la fréquence de Shannon-Nyquist.

2. On considère un signal $s(t)$ à *valeurs réelles* et à bande étroite. On note f_0 la fréquence centrale de $s(t)$; $[f_0 - B, f_0 + B]$ désigne la bande des fréquences positives occupés par $s(t)$ (f_0 grand par rapport à B).

(a) Tracer schématiquement le spectre de $s(t)$ en faisant apparaître les fréquences positives et négatives.

(b) Rappeler la définition de $z_s(t)$, signal analytique associé à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

(c) Rappeler la définition de $\xi_s(t)$, enveloppe complexe associée à $s(t)$. Tracer schématiquement son spectre.

3. (a) Quelle est la bande occupée par $\xi_s(t)$? En déduire la fréquence minimale à laquelle on peut échantillonner $\xi_s(t)$ sans perdre d'information.

(b) Expliquer brièvement comment à partir d'échantillons de $\xi_s(t)$ prélevés à la fréquence $2B$, on peut reconstituer $s(t)$. Conclure.

Exercice 3: filtrage, égalisation Un signal $x(t)$ est transmis à travers un canal et le signal reçu est $y(t) = Ax(t - t_0) + \alpha x(t - t_1)$, où $\alpha \ll A$ et $t_0 < t_1$.

1. Déterminer la fonction de transfert $H_c(f)$ de ce canal.

2. On désire compenser l'effet du canal par un filtrage de $y(t)$ (traitement d'égalisation). Quelle est la réponse en fréquence $H_e(f)$ du filtre (appelé filtre égaliseur) que l'on doit appliquer à $y(t)$ afin de retrouver $Ax(t - t_0)$ en sortie de l'égaliseur ?

3. En utilisant le fait que $\alpha \ll A$ et en effectuant un développement limité à l'ordre deux (par rapport à α/A) de $H_e(f)$, montrer que ce filtre égaliseur peut être approximé par le système suivant (figure 1) qui comporte des lignes à retard et des amplificateurs à gain constant. Préciser les valeurs de A_0, A_1, A_2 et τ.

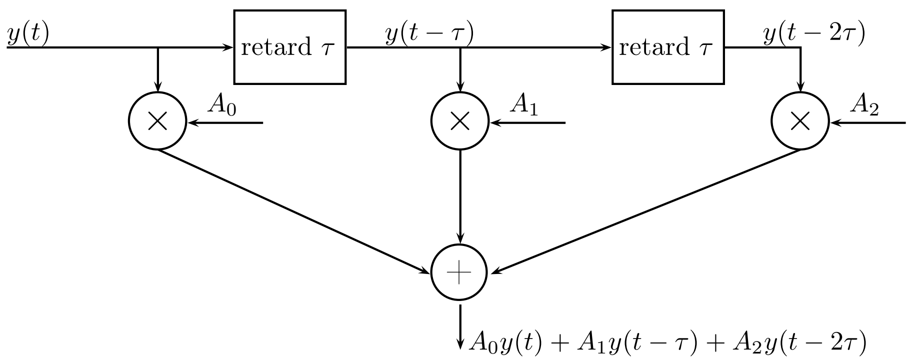

FIGURE 1 – Approximation du filtre égaliseur à l'aide de cellules de gain et de retard