Exercices sur le cours de mathématiques

Marc Castella
marc.castella@telecom-sudparis.eu

Télécom SudParis

January 7, 2022

Section 1

Mesure et intégration

Enoncé: Montrer que la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est engendrée par:

- les fermés;
- les intervalles du type $]a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$;
- les intervalles du type $]-\infty, b]$ $(b \in \mathbb{R})$..

Enoncé: Montrer que la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est engendrée par:

- les fermés;
- les intervalles du type $]a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$;
- les intervalles du type $]-\infty, b]$ $(b \in \mathbb{R})$..

▷ Soient

- $\mathcal{B}_1$ la tribu engendrée par les fermés,
- $\mathcal{B}_2$ la tribu engendrée par les intervalles $]a, b]$,
- $\mathcal{B}_3$ la tribu engendrée par les intervalles $]-\infty, b]$.

Montrer successivement $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}_3$.

Tribu $\mathcal{F}$ sur un espace Ω

Famille d'ensembles[1] telle que:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

- une intersection de tribus est une tribu $\rightsquigarrow$ tribu engendrée.
- tribu des Boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ = tribu engendrée par les ouverts.

[1] ce sont donc des ensembles d'ensembles, que j'appelle familles (ou collections) d'ensembles (ou de parties)

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les ouverts, elle contient donc:

- les ouverts,
- les complémentaires des ouverts, càd les fermés.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu et elle contient les fermés.
$\rightarrow$ elle contient donc la plus petite tribu qui contient les fermés,
$\rightarrow$ elle contient la tribu engendrée par les fermés $\rightarrow \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Répéter ce raisonnement... (en y ajoutant une subtilité, usuelle dans $\mathbb{R}^n$, concernant l'écriture d'un ouvert comme réunion *dénombrable* de pavés ouverts)

Enoncé: Soient τ_1 et τ_2 deux tribus engendrées respectivement par deux familles d'ensembles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

1. Vérifier que $\tau_1 \cap \tau_2$ est une tribu. Est-elle engendrée par $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$?
2. On considère les sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$:

   $$\mathcal{F}_1 = \{A_1 \cap A_2; A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\} \qquad \mathcal{F}_2 = \{A_1 \cup A_2; A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$$

   Montrer que $\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$.
3. Vérifier qu'en général $\tau_1 \cup \tau_2$ n'est pas une tribu et montrer que $\sigma(\tau_1 \cup \tau_2) = \sigma(\mathcal{F}_1)$.

<u>Q</u>: Vérifier que $\tau_1 \cap \tau_2$ est une tribu.
Vérification par la définition: toute intersection (même infinie, indénombrable) de tribus est une tribu.

Si $\tau_1 = \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $\tau_2 = \sigma(\mathcal{C}_2)$, alors, sauf cas particulier, $\tau_1 \cap \tau_2 \neq \sigma(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}2))$.
Contre-exemple:

- $E \subsetneq \Omega, E \neq \emptyset$,
- $\mathcal{C}_1 = \{E\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{E^c\}$.

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1 \cap A_2; A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\} \qquad \mathcal{F}_2 = \{A_1 \cup A_2; A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$$

Q: Montrer que $\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$.

Soit $A \in \mathcal{F}_1$; il s'écrit $A = A_1 \cap A_2$ avec $A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2$.

- $A^c = \underbrace{A_1^c}_{\in \tau_1} \cup \underbrace{A_2^c}_{\in \tau_2} \in \mathcal{F}_2$,
- donc $A^c \in \sigma(\mathcal{F}_2)$ car $\mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$,
- donc $A \in \sigma(\mathcal{F}_2)$.
- Comme valable pour tout $A \in \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1 \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$,
- donc $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$.
- Autre sens similaire. . .

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1 \cap A_2; A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\} \qquad \mathcal{F}_2 = \{A_1 \cup A_2; A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$$

Q: Vérifier qu'en général $\tau_1 \cup \tau_2$ n'est pas une tribu, montrer que $\sigma(\tau_1 \cup \tau_2) = \sigma(\mathcal{F}_1)$.

- Soit $A \in \tau_1 \cup \tau_2$ (compléter ...) $A \in \sigma(\mathcal{F}_1)$,
- Soit $A \in \mathcal{F}_1$ (compléter ...) $A \in \sigma(\tau_1 \cup \tau_2)$.

Raisonnement simple, mais il convient de ne pas se mélanger entre intersection d'ensembles et intersection de familles d'ensembles.

Enoncé: Soient E_1 et E_2 deux ensembles non vides et f une application de E_1 dans E_2.

1. Montrer que si τ_2 est une tribu sur E_2, alors

$$\tau = f^{-1}(\tau_2) = \{f^{-1}(B); B \in \tau_2\}$$

   est une tribu de E_1 (appelée *tribu image réciproque* de τ_2 par f).

2. Soit τ_1 une tribu sur E_1. Montrer sur un exemple que $f(\tau_1) = \{f(A); A \in \tau_1\}$ n'est pas une tribu de E_2.

3. Soit τ_1 une tribu sur E_1. Montrer que:

$$\tau' = \{B \subset E_2 \,|\, f^{-1}(B) \in \tau_1\}$$

   est une tribu de E_2 (appelée *tribu induite* de τ_1 par f).

4. Montrer que pour toute famille de sous-ensembles $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E_2)$, on a

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$$

   Ce résultat est appelé *lemme de transport*.

Tribu image réciproque

Image réciproque

Si $f : X \to Y$ et $D \subset Y$, par définition $f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$.

▷ f n'est pas forcément inversible et f^{-1} n'existe pas forcément!

Tribu image réciproque

Image réciproque

Si $f : X \to Y$ et $D \subset Y$, par définition $f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$.

▷ f n'est pas forcément inversible et f^{-1} n'existe pas forcément!

Se ramener à la définition pour définir la tribu image réciproque.

(i) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, tout comme $E_1 = f^{-1}(E_2)$ sont dans $f^{-1}(\tau_2)$.

Tribu image réciproque

Image réciproque

Si $f : X \to Y$ et $D \subset Y$, par définition $f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$.

▷ f n'est pas forcément inversible et f^{-1} n'existe pas forcément!

Se ramener à la définition pour définir la tribu image réciproque.

(i) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, tout comme $E_1 = f^{-1}(E_2)$ sont dans $f^{-1}(\tau_2)$.

(ii) Pour tout $A \in f^{-1}(\tau_2)$, il existe $B \in \tau_2$ tel que $A = f^{-1}(B)$. On a alors $A^c = f^{-1}(B^c)$ et, puisque $B^c \in \tau_2$ il s'ensuit $A^c \in f^{-1}(\tau_2)$.

Tribu image réciproque

Image réciproque

Si $f : X \to Y$ et $D \subset Y$, par définition $f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$.

▷ f n'est pas forcément inversible et f^{-1} n'existe pas forcément!

Se ramener à la définition pour définir la tribu image réciproque.

(i) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, tout comme $E_1 = f^{-1}(E_2)$ sont dans $f^{-1}(\tau_2)$.

(ii) Pour tout $A \in f^{-1}(\tau_2)$, il existe $B \in \tau_2$ tel que $A = f^{-1}(B)$. On a alors $A^c = f^{-1}(B^c)$ et, puisque $B^c \in \tau_2$ il s'ensuit $A^c \in f^{-1}(\tau_2)$.

(iii) Supposons donnés pour $n \in \mathbb{N}$ des ensembles $A_n \in f^{-1}(\tau_2)$ que l'on écrit $A_n = f^{-1}(B_n)$ pour des $B_n \in \tau_2$. Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$, on obtient $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in f^{-1}(\tau_2)$ puisque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \tau_2$.

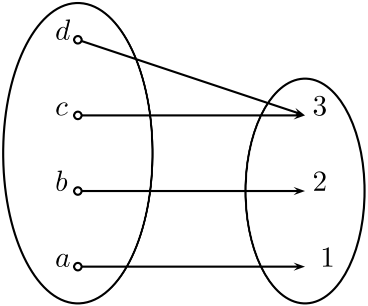
Image d'une tribu

L'image directe d'une tribu n'est pas une tribu.

Image d'une tribu

L'image directe d'une tribu n'est pas une tribu.

Définissons f ainsi:



L'image de la tribu $\{\emptyset, \{a,b,c,d\}, \{a,c\}, \{b,d\}\}$ est $\{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ et ce n'est pas une tribu.

Tribu induite

$$\tau' = \{B \subset E_2 \,|\, f^{-1}(B) \in \tau_1\}$$

Tribu induite

$$\tau' = \{B \subset E_2 \mid f^{-1}(B) \in \tau_1\}$$

(i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1$ et $f^{-1}(E_2) = E_1 \in \tau_1$. Ainsi, $\emptyset$ et E_2 sont dans τ'.

Tribu induite

$$\tau' = \{B \subset E_2 \,|\, f^{-1}(B) \in \tau_1\}$$

(i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1$ et $f^{-1}(E_2) = E_1 \in \tau_1$. Ainsi, $\emptyset$ et E_2 sont dans τ'.

(ii) Pour n'importe quel $A \in \tau'$, $f^{-1}(A) \in \tau_1$. On note alors que $f^{-1}(A^c) = \left[f^{-1}(A)\right]^c \in \tau_1$, prouvant $A^c \in \tau'$.

Tribu induite

$$\tau' = \{B \subset E_2 \,|\, f^{-1}(B) \in \tau_1\}$$

(i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_1$ et $f^{-1}(E_2) = E_1 \in \tau_1$. Ainsi, $\emptyset$ et E_2 sont dans τ'.

(ii) Pour n'importe quel $A \in \tau'$, $f^{-1}(A) \in \tau_1$. On note alors que $f^{-1}(A^c) = \left[f^{-1}(A)\right]^c \in \tau_1$, prouvant $A^c \in \tau'$.

(iii) Supposons donnés pour $n \in \mathbb{N}$ des ensembles $A_n \in \tau'$ c'est-à-dire que $f^{-1}(A_n) \in \tau_1$. On vérifie $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$. Ce dernier ensemble est dans τ_1 par stabilité de τ_1 par réunion dénombrable. Donc $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \tau_1$ et en conséquence, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau'$.

Lemme de transport

$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E_2)$, montrer $\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$

Lemme de transport

$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E_2)$, montrer $\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$

On a $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ et donc $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$. A droite, la plus grande collection d'ensemble est une tribu, qui contient la tribu engendrée par certain des éléments qu'il contient. Donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$.

Lemme de transport

$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E_2)$, montrer $\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$

On a $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ et donc $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$. A droite, la plus grande collection d'ensemble est une tribu, qui contient la tribu engendrée par certain des éléments qu'il contient. Donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$.
Soit

$$\mathcal{B} = \{A \subset E_2 \,|\, f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))\}\,.$$

On a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ puisque $\forall B \in \mathcal{S}$, $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$. Par conséquent, et puisque $\mathcal{B}$ est une tribu, $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}$. Dès lors $f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$. Enfin, $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$ en reprenant la définition de $\mathcal{B}$. Il s'ensuit $f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$ et donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{S})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{S}))$ qui est l'inclusion réciproque cherchée.

Enoncé: Soit $\tau = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid A = -A\}$ où on définit l'ensemble $-A = \{-x; x \in A\}$.

1. Montrer que τ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Les applications $f : x \mapsto e^x$, $g : x \mapsto x^3$ et $h : x \mapsto \cos x$ sont-elles:
    1. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \tau)$-mesurables?
    2. $(\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables?
    3. (τ, τ)-mesurables?
3. Caractériser les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont $(\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.
4. Caractériser les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont (τ, τ)-mesurables.

$(\Omega, \mathcal{T})$ et $(E, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables.

fonction mesurable

$f : \Omega \to E$ est mesurable lorsque l'image réciproque de tout ensemble mesurable est un ensemble mesurable, càd $\forall X \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(X) \in \mathcal{T}$.

- Il faut se rappeler ce qu'est l'image réciproque d'un ensemble!
- On peut/doit préciser les tribus $\rightsquigarrow$ ici, f est $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$-mesurable.
- borélienne = mesurable pour la tribu des boréliens
- Si $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ est engendrée par une collection d'ensembles $\mathcal{C}$, il suffit de vérifier: $\forall X \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(X) \in \mathcal{T}$.

➤ Une fonction continue est mesurable (borélienne).

Enoncé: Etudier la véracité des affirmations suivantes:

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ est borné si, et seulement si, il est de mesure de Lebesgue finie.
2. Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si il est dénombrable.
3. Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive si, et seulement si, il contient un ouvert non vide.
4. Dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et pour $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, l'ensemble $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Q: Un ouvert de $\mathbb{R}$ est borné si, et seulement si, il est de mesure de Lebesgue finie. ?

Q: Un ouvert de $\mathbb{R}$ est borné si, et seulement si, il est de mesure de Lebesgue finie. ?

Faux: prendre par exemple $\bigcup_{n=1}^{+\infty}]n, n + \frac{1}{2^n}[$, ouvert, de mesure de Lebesgue finie et non borné.
Tout ensemble borné est toutefois de mesure de Lebesgue finie.

Q: Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si il est dénombrable. ?

Q: Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si il est dénombrable. ?

Faux: l'ensemble triadique de Cantor est un exemple de borélien de $\mathbb{R}$, non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle.
Une implication est toutefois vraie: tout ensemble dénombrable est nécessairement de mesure de Lebesgue nulle.

Q: Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive si, et seulement si, il contient un ouvert non vide. ?

Q: Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive si, et seulement si, il contient un ouvert non vide. ?

Faux: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne contient aucun ouvert non vide et est de mesure de Lebesgue positive.
Une implication est toutefois vraie: un ensemble contenant un ouvert non vide est de mesure de Lebesgue strictement positive.

Q: Dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et pour $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, l'ensemble $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$ est de mesure de Lebesgue nulle. ?

<u>Q</u>: Dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et pour $p \in \{1, \dots, n-1\}$, l'ensemble $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$ est de mesure de Lebesgue nulle. ?

Vrai: la difficulté est ici que la mesure produit dans $\mathbb{R}^n$ fait intervenir $0 \times +\infty$. Toutefois, $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]-n, n[^p \times \{0\}^{n-p}$ est une suite croissante d'ensembles emboîtés. De plus, chacun des pavés $]-n, n[^p \times \{0\}^{n-p}$ est de mesure de Lebesgue nulle (produit de 0 par $2n$). Par continuité de la mesure, la mesure de $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$ est donc nulle.
De façon générale, tout ensemble de dimension strictement inférieure à la dimension de l'espace ambiant est de mesure de Lebesgue nulle (droite ou courbe dans $\mathbb{R}^2$, surface ou hyperplan dans $\mathbb{R}^3$,...).

Enoncé: On pose pour tout $x \in [1, +\infty[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Calculer $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Rappel: une fonction f est dite intégrable, lorsque $\int |f|\, d\mu < +\infty$.

Convergence monotone

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions telle que μ presque partout:

- $0 \leq f_n$ (fonctions positives)
- $f_n \uparrow f$ (suite croissante)

Alors: $\int f_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu$.

➤ Valeur $+\infty$ possible.

Convergence dominée

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions telle que μ presque partout:

- $f_n \to f$ (convergence simple)
- $|f_n| \leq g$ avec g intégrable (domination)

Alors: $\int f_n\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f\, d\mu$.

➤ Contient dans la conclusion l'intégrabilité de f et des f_n.

Introduisons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} ke^{-kx}$ pour tout $n \geq 1$. Comme chacun des termes dans cette somme est positif pour tout $x \in [1, +\infty[$, S_n est une suite croissante de fonctions. Plus précisément, $0 \leq S_n \uparrow f$ presque partout lorsque $n \to \infty$ (même partout ici). Dès lors, le théorème de convergence monotone s'applique et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} S_n(x)\,dx$. Il ne reste qu'à calculer:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} S_n(x)\,dx &= \int_1^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} ke^{-kx}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_1^{+\infty} ke^{-kx}\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[-e^{-kx}\right]_{x=1}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}
\end{aligned}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} S_n(x)\,dx = \frac{1}{e-1}\,.$$

Autre méthode: Définissons pour $x \geq 1$
$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$. Pour tout $x \geq 1$,
$|e^{-nx}| \leq e^{-n}$ donc $\sum_{n\geq 0} |e^{-nx}| \leq \sum_{n\geq 0} e^{-n} = \frac{1}{1-1/e} < +\infty$, ce qui prouve convergence normale (donc simple) de la série de fonctions vers h.
De plus

$$\sum_{n\geq 0} |-ne^{-nx}| \leq \sum_{n\geq 0} ne^{-n} < +\infty\,.$$

Ceci prouve la convergence normale et donc uniforme de la série des dérivées $h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -ne^{-nx} = -f(x)$. La convergence uniforme permet dès lors d'intégrer: $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = -\int_1^{+\infty} h'(x)\,dx = h(1) - \lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{1}{1-1/e} - 1 = \frac{1}{e-1}$.

Enoncé: Montrer que la suite suivante converge et déterminer sa limite:

$$\left(\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

La fonction $f_n(x) = \mathrm{Arctan}(nx)e^{-x^n}$ définie sur $[0, +\infty[$ est continue donc borélienne et l'on a pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ où:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \frac{\pi}{2} & x \in]0, 1[, \\ \frac{\pi}{2e} & x = 1, \\ 0 & x > 1\,. \end{cases}$$

D'autre part, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée (presque partout) par une fonction g intégrable, définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x \in [0, 1], \\ \frac{\pi}{2}e^{-x} & x > 1\,. \end{cases}$$

Le théorème de convergence dominée s'applique donc et:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(nx)e^{-x^n}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Enoncé: Etablir que:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \ln x \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$

puis en déduire à l'aide du changement de variables $y = 1 - \frac{x}{n}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \lim_{n\to+\infty} \left[\ln n - (1 + 1/2 + \ldots + 1/n)\right].$$

Soit la suite de fonctions définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par
$f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \ln x \mathbb{1}_{]0,n]}(x)$.

- f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ donc mesurable (Borélienne),
- f_n converge simplement lorsque $n \to \infty$ vers $f(x) = e^{-x} \ln x$,
- pour tout x, $0 \leq (1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \ln(1-\frac{x}{n})} \leq e^{-x}$ donc $|f_n(x)| \leq e^{-x} |\ln x|$,
- enfin $x \mapsto e^{-x} |\ln x|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Il en découle que le théorème de convergence dominée est applicable et la limite cherchée vaut:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx\,.$$

Il reste à effectuer le calcul, où l'on effectue le changement de variables $y = 1 - x/n$, soit $x = n(1-y)$:

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \ln x\,dx = \int_0^1 y^n \ln(n(1-y))n\,dy = n\ln n \int_0^1 y^n\,dy + n\int_0^1 y^n \ln(1-y)\,dy$$

puis en faisant attention dans l'intégration par parties d'avoir deux termes convergents:

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1}\ln n + n\left[\frac{y^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-y)\right]_{y=0}^{1} - n\int_0^1 \frac{y^{n+1}-1}{n+1}\frac{(-1)}{1-y}\,dy \\
&= \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{y^{n+1}-1}{y-1}\,dy \\
&= \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} y^k\,dy \\
&= \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - (1+1/2+\cdots+1/(n+1))\right] \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\ln n - (1+1/2+\cdots+1/n)\right] - \frac{n}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

En prenant la limite pour $n \to +\infty$ à gauche et à droite ci-dessus, on trouve bien:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\ln n - (1+1/2+\cdots+1/n)\right]$$

Enoncé: Calculer

$$I = \iiint_D \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}\, dx\, dy\, dz$$

où $D =]0,1[^2 \times]0,+\infty[$ et en déduire:

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan } z}{z} \right)^2 dz$$

Fubini-Tonnelli

Si $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty]$, alors ($+\infty$ possible, auquel cas $f(x,y)$ non intégrable):

$$\int \left[\int f(x,y)\, dx \right] dy = \int \left[\int f(x,y)\, dy \right] dx$$

Fubini

Si $f(x,y)$ intégrable (i.e. $\int |f(x,y)|\, dxdy < +\infty$), alors:

$$\int \left[\int f(x,y)\, dx \right] dy = \int \left[\int f(x,y)\, dy \right] dx$$

et la valeur commune est notée $\iint f(x,y)\, dxdy$.

- Utiliser Fubini-Tonnelli en premier!
  - Hypothèses de mesurabilité manquantes (indispensables).
  - Généralisable pour des espaces produits avec mesure σ-finie (par ex. $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ avec mesure de Lebesgue).

La fonction

$$f(x,y,y) = \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$$

définie sur $D =]0,1[^2 \times]0,+\infty[$ est borélienne (car continue) et positive. D'après le théorème de Fubini, il est possible d'intégrer dans l'ordre souhaité.
On a d'une part:

$$I = \int_0^{+\infty} \iint f(x,y,z)\, dxdy\; dz = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2z^2}\, dx \right)^2\, dz$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\left[\frac{\mathrm{Arctan} xz}{z} \right]_{x=0}^{x=1} \right)^2\, dz = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan} z}{z} \right)^2\, dz$$

D'autre part, on notera que pour tout $(x,y) \in]0,1[^2$ tels que $x \neq y$ (donc pour presque tout (x,y)), on a:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2-y^2}\frac{1}{1+x^2z^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2}\frac{1}{1+y^2z^2}$$

Dès lors, il vient:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x,y,z)\,dz &= \frac{x^2}{x^2-y^2}\left[\frac{\mathrm{Arctan} xz}{x}\right]_{z=0}^{z=+\infty} - \frac{y^2}{x^2-y^2}\left[\frac{\mathrm{Arctan} yz}{y}\right]_{z=0}^{z=+\infty}\\ &= \frac{(\pi/2)x}{x^2-y^2} - \frac{(\pi/2)y}{x^2-y^2} = \frac{\pi/2}{x+y}\,.\end{aligned}$$

Enfin, on a:

$$\begin{aligned}I &= \iint_{]0,1[^2} \frac{\pi/2}{x+y}\,dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 [\ln(x+y)]_{y=0}^{y=1}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln(1+x) - \ln(x)\,dx\\ &= \frac{\pi}{2}\Big[(x+1)\big(\ln(x+1)-1\big) - x\big(\ln(x)-1\big)\Big]_{x=0}^{1} = \pi\ln 2\end{aligned}$$

où l'on s'est rappelé la primitive (par intégration par parties) $\int \ln x\,dx = [x\ln x] - \int 1\,dx = x(\ln x - 1) + \mathrm{cste}.$. On en déduit l'intégrale demandée $J = \pi \ln 2$.

Section 2

Analyse complexe

Enoncé:

1. Etudier l'holomorphie et, le cas échéant, calculer la dérivée des fonctions suivantes:
   - $z \mapsto z^2$
   - $z \mapsto \overline{z}$
   - $z \mapsto |z|^2$
   - $z \mapsto z.e^z$
2. Montrer (ou re-démontrer) l'équivalence entre les propriétés suivantes pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (où Ω est un domaine de $\mathbb{C}$):
   (i) f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$.
   (ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
   (iii) $\mathrm{d}f(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
3. Montrer les conditions dites de Cauchy d'holomorphie d'une fonction f, en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées polaires.
4. Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:
   - $z = x + \mathrm{i}y \mapsto x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 3x - 3\mathrm{i}y + 4$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$)
   - $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \mapsto \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2})$ ($r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in]0, \pi[$).

<u>Q</u>: Etudier l'holomorphie et, le cas échéant, calculer la dérivée des fonctions suivantes:

- $z \mapsto z^2$
- $z \mapsto \bar{z}$
- $z \mapsto |z|^2$
- $z \mapsto z.e^z$

Définition de l'holomorphie

Définition

*$f : \Omega \to \mathbb{C}$ (où Ω domaine de $\mathbb{C}$) est $\mathbb{C}$-**dérivable** en $z_0 \in \Omega$ lorsque:*

$$\lim_{h \to 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$. On notera alors $f'(z_0)$ cette limite.
*f est **holomorphe** sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.*

Rq: les règles de dérivation des produits, rapports, composées de fonctions se généralisent.

Définition de l'holomorphie

Définition

*$f : \Omega \to \mathbb{C}$ (où Ω domaine de $\mathbb{C}$) est $\mathbb{C}$-**dérivable** en $z_0 \in \Omega$ lorsque:*

$$\lim_{h \to 0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$. On notera alors $f'(z_0)$ cette limite.
*f est **holomorphe** sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.*

Rq: les règles de dérivation des produits, rapports, composées de fonctions se généralisent.
Pour $f(z) = z^2$,

$$\frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = 2z_0 + h \xrightarrow[h \to 0, h \in \mathbb{C}]{} 2z_0$$

$f(z) = z^2$ est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour dérivée $f'(z) = 2z$.

Les conditions de Cauchy

Vues en cours... à démontrer dans la suite du TD! On identifie:

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z \leftrightarrow (x, y) \qquad \text{avec } x = \Re z, y = \Im z, z = x + \mathrm{i}y$$

$$f \leftrightarrow (P, Q) \qquad \text{avec } f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$$

$$P(x, y) = \Re f(z), \quad Q(x, y) = \Im f(z)$$

Pour $f(z) = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{P(x,y)} + \mathrm{i} \underbrace{2xy}_{Q(x,y)}$, P et Q sont

différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2x \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y \end{cases}$$

ce qui prouve (encore!) l'holomorphie. Où trouver la dérivée?

$$f(z) = \bar{z}$$

$$f(z) = \bar{z}$$

$$\frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\overline{h}}{h} \xrightarrow[h \to 0, h \in \mathbb{R}]{} 1$$

$$\xrightarrow[h \to 0, h \in \mathrm{i}\mathbb{R}]{} -1$$

f n'est donc dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

Avec $f(z) = \overline{z} = x - \mathrm{i}y$, P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ mais:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 1 \neq \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -1 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

$$f(z) = |z|^2$$

$$f(z) = |z|^2$$

$$\frac{|z_0 + h|^2 - |z_0|^2}{h} = \frac{z_0\overline{h} + \overline{z_0}h + h\overline{h}}{h} = z_0\frac{\overline{h}}{h} + \overline{z_0} + \overline{h}$$

pas de limite pour $h \to 0, h \in \mathbb{C}$ sauf si $z_0 = 0$.
f est $\mathbb{C}$-dérivable uniquement en $z_0 = 0$ (dérivée nulle), non dérivable ailleurs.

Avec $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ mais:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x \neq \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq -\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$f(z) = z.e^z$$

$$f(z) = z.e^z$$

f holomorphe sur $\mathbb{C}$ et:

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f'(z) = e^z + z.e^z$$

(règle du produit de deux fonction holomorphes).
Rappel: (série entière, rayon convergence infini)

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (e^z)' = e^z$$

Vérification directe et conditions de Cauchy . . . à faire!

On identifie classiquement:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\leftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = x + \mathrm{i}y &\leftrightarrow (x, y) \qquad\qquad \text{avec } x, y \in \mathbb{R} \\ f(z) = f(x + \mathrm{i}y) &\leftrightarrow f(x, y) \end{aligned}$$

Q: Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (où Ω est un domaine de $\mathbb{C}$):

(i) f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$.

(ii) f est différentiable et de plus $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z_0} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_0}$.

(iii) f est différentiable et sa différentielle $df|_{z_0}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Différentiabilité

Définition (rappel)

*$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est **différentiable** en (x_0, y_0) lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que:*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + o(\|(x-x_0, y-y_0\|)$$

Les dérivées partielles existent alors en (x_0, y_0) et:

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \qquad b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}$$

La différentielle de f en (x_0, y_0), notée $df|_{(x_0,y_0)}$ est l'application linéaire:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\ (u,v) &\mapsto au + bv \end{aligned}$$

Identification $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$, et en notant $d = f'(z_0)$:

$$f \text{ est } \mathbb{C}\text{-dérivable en } z_0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(z) = f(z_0) + d(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

Identification $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$, et en notant $d = f'(z_0)$:

$$f \text{ est } \mathbb{C}\text{-dérivable en } z_0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(z) = f(z_0) + d(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + d(x + \mathrm{i}y - (x_0 + \mathrm{i}y_0)) + o(\|x - x_0\|, \|y - y_0\|)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + d(x - x_0) + \mathrm{i}d(y - y_0) + o(\|x - x_0\|, \|y - y_0\|)$$

$$\Updownarrow$$

$$f \text{ est différentiable en } (x_0, y_0) \text{ et}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = d \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \mathrm{i}d$$

d'où l'équivalence (i) et (ii) ■

Noter que la différentielle de f est donnée par:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto du + (\mathrm{i}d)v$$

Linéarité par rapport à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire lorsque

$$\varphi(u, v) = au + bv \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire lorsque

$$\psi(h) = ch \text{ avec } c \in \mathbb{C}.$$

Après identification $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ par $h = u + \mathrm{i}v$ (avec $u, v \in \mathbb{R}$):

$$\psi(h) = \psi(u + \mathrm{i}v) = cu + (\mathrm{i}c)v \tag{1}$$

- ψ $\mathbb{C}$-linéaire $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$-linéaire.
- ϕ $\mathbb{R}$-linéaire n'est en général pas $\mathbb{C}$-linéaire.
- ϕ $\mathbb{R}$-linéaire et $b = \mathrm{i}a \leftrightarrow$ $\mathbb{C}$-linéaire.
- La différentielle d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est du type de l'équation (2), càd est $\mathbb{C}$-linéaire. ■

<u>Q</u>: Montrer les conditions dites de Cauchy d'holomorphie d'une fonction f, en coordonnées cartésiennes puis polaires.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C} &\leftrightarrow \mathbb{R}^2 \\
z &\leftrightarrow (x, y) & \text{avec } x = \Re z, y = \Im z, z = x + \mathrm{i} y \\
f &\leftrightarrow (P, Q) & \text{avec } f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y) \\
& & P(x, y) = \Re f(z), \quad Q(x, y) = \Im f(z)
\end{aligned}
$$

<u>Q</u>: Montrer les conditions dites de Cauchy d'holomorphie d'une fonction f, en coordonnées cartésiennes puis polaires.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &\leftrightarrow \mathbb{R}^2 \\
z &\leftrightarrow (x, y) && \text{avec } x = \Re z, y = \Im z, z = x + \mathfrak{i}y \\
f &\leftrightarrow (P, Q) && \text{avec } f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + \mathfrak{i}Q(x, y) \\
& && P(x, y) = \Re f(z), \quad Q(x, y) = \Im f(z)
\end{aligned}$$

En un point $z_0 \leftrightarrow (x_0, y_0)$:

$$f\ \mathbb{C}\text{-dérivable} \iff f \text{ différentiable et } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

<u>Q</u>: Montrer les conditions dites de Cauchy d'holomorphie d'une fonction f, en coordonnées cartésiennes puis polaires.

$$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$z \leftrightarrow (x, y) \qquad \text{avec } x = \Re z, y = \Im z, z = x + \mathrm{i}y$$

$$f \leftrightarrow (P, Q) \qquad \text{avec } f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$$

$$P(x, y) = \Re f(z), \quad Q(x, y) = \Im f(z)$$

En un point $z_0 \leftrightarrow (x_0, y_0)$:

$$f\ \mathbb{C}\text{-dérivable} \iff f \text{ différentiable et } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathrm{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\iff P \text{ et } Q \text{ différentiables et } \left(\frac{\partial P + \mathrm{i}Q}{\partial y}\right) = \mathrm{i}\left(\frac{\partial P + \mathrm{i}Q}{\partial x}\right)$$

$$\iff P \text{ et } Q \text{ différentiables et } \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Passage en polaire

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow (r, \theta) \text{ avec } \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Différentielle et composition: $\begin{bmatrix} \frac{\partial .}{\partial r} & \frac{\partial .}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial .}{\partial x} & \frac{\partial .}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$ donne les relations:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial .}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial .}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r} \dfrac{\partial .}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial .}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial .}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \dfrac{\partial .}{\partial \theta} \end{cases}$$

Rq: Se retrouve aussi en écrivant la différentielle $\frac{\partial .}{\partial x} dx + \frac{\partial .}{\partial y} dy$ et en remplaçant $dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$ et $dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$

Et encore les conditions de Cauchy...

En un point $z_0 \leftrightarrow (x_0, y_0)$:

$$
\begin{aligned}
f\ \mathbb{C}\text{-dérivable} &\iff f \text{ différentiable et } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
&\iff \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \mathfrak{i}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\\
&\iff (\sin\theta - \mathfrak{i}\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial r} = (-\cos\theta - \mathfrak{i}\sin\theta)\,\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\\
&\iff \mathfrak{i}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}
$$

et avec $f = P + \mathfrak{i}Q$ où P et Q réelles:

$$
\iff \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \end{cases}
$$

<u>Q</u>: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 3x - 3\mathrm{i}y + 4 \qquad (x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R})$$

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 3x - 3\mathrm{i}y + 4 \qquad (x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R})$$

- *Conditions Cauchy:* trop facile!

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 3x - 3\mathrm{i}y + 4 \qquad (x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R})$$

- *Conditions Cauchy:* trop facile!
- *Dérivée:* $f'(z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_0} = 2x + 2\mathrm{i}y - 3 = 2z - 3$

<u>Q</u>: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 3x - 3\mathrm{i}y + 4 \qquad (x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R})$$

- *Conditions Cauchy:* trop facile!
- *Dérivée:* $f'(z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z_0} = 2x + 2\mathrm{i}y - 3 = 2z - 3$
- *En fait:* $f(z) = z^2 - 3z + 4$
  (prolongement dans $\mathbb{C}$ de $f(x + \mathrm{i}.0) = x^2 - 3x + 4$).

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$f(z) = x^5 - 10x^3y^2 - 6x^3 + 5xy^4 + 18xy^2 + 2x - 3 \\ + \mathfrak{i}\left(5x^4y - 10x^2y^3 - 18x^2y + y^5 + 6y^3 + 2y\right)$$

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$f(z) = x^5 - 10x^3y^2 - 6x^3 + 5xy^4 + 18xy^2 + 2x - 3 \\ + \mathfrak{i}\left(5x^4y - 10x^2y^3 - 18x^2y + y^5 + 6y^3 + 2y\right)$$

- *Conditions de Cauchy:* facile!

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$f(z) = x^5 - 10x^3y^2 - 6x^3 + 5xy^4 + 18xy^2 + 2x - 3 \\ + \mathfrak{i}\left(5x^4y - 10x^2y^3 - 18x^2y + y^5 + 6y^3 + 2y\right)$$

- *Conditions de Cauchy:* facile!
- $f(z) = z^5 - 6z^3 + 2z - 3$

<u>Q</u>: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$f(z) = x^5 - 10x^3y^2 - 6x^3 + 5xy^4 + 18xy^2 + 2x - 3 \\ + \mathrm{i}\left(5x^4y - 10x^2y^3 - 18x^2y + y^5 + 6y^3 + 2y\right)$$

- *Conditions de Cauchy:* facile!
- $f(z) = z^5 - 6z^3 + 2z - 3$
  car $f(x + \mathrm{i}.0) = x^5 - 6x^3 + 2x - 3$ et unicité du prolongement holomorphe.

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \mapsto \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}) \qquad (r \in \mathbb{R}_{++} \text{ et } \theta \in]0, \pi[)$$

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \mapsto \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}) \qquad (r \in \mathbb{R}_{++} \text{ et } \theta \in]0,\pi[)$$

- *Conditions de Cauchy:* facile (en polaire)!

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \mapsto \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}) \qquad (r \in \mathbb{R}_{++} \text{ et } \theta \in]0, \pi[)$$

- *Conditions de Cauchy:* facile (en polaire)!

$$\begin{aligned} f'(z) &= \cos\theta \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_z - \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_z \\ &= (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_z \\ &= \frac{(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)}{\mathrm{i}r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_z = \frac{1}{\mathrm{i}z}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_z = \frac{1}{2f(z)} \end{aligned}$$

Q: Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \mapsto \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}) \qquad (r \in \mathbb{R}_{++} \text{ et } \theta \in]0, \pi[)$$

- *Conditions de Cauchy:* facile (en polaire)!

$$\begin{aligned} f'(z) &= \cos\theta \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_z - \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_z \\ &= (\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_z \\ &= \frac{(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)}{\mathrm{i}r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_z = \frac{1}{\mathrm{i}z}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_z = \frac{1}{2f(z)} \end{aligned}$$

- On peut dériver la relation $f(z)^2 = z$, d'où $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$.

Enoncé:

- Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors on a équivalence entre les propriétés:
  (i) f est constante sur Ω.
  (ii) $P = \Re(f)$ est constante sur Ω.
  (iii) $Q = \Im(f)$ est constante sur Ω.
  (iv) $|f|$ est constante sur Ω.
  (v) $\overline{f}$ est holomorphe sur Ω.
- Montrer qu'une fonction holomorphe et à valeurs réelles sur un domaine ouvert $\Omega \in \mathbb{C}$ est constante.

Enoncé:

1. Rappeler les développements des fonctions classiques $\exp, \cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$.
2. Donner pour $z = x + \mathrm{i}y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ une expression de e^z à partir de fonctions de variables réelles.
3. Donner le lien entre $\cos$ et ch ainsi qu'entre $\sin$ et sh.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 0$. On notera $z = x + \mathrm{i}y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

Fonctions usuelles $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pour tout x *réel*: $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Taylor-Lagrange: $f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N, \quad \theta \in]0,1[.$

Exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- série entière, rayon convergence ∞. On note aussi $\exp(z) = e^z$.

Exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- série entière, rayon convergence ∞. On note aussi $\exp(z) = e^z$.
- prolonge la fonction exponentielle réelle.

Exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- série entière, rayon convergence ∞. On note aussi $\exp(z) = e^z$.
- prolonge la fonction exponentielle réelle.
- Dérivée: $\frac{d}{dz} \exp z = \exp z$

Exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- série entière, rayon convergence ∞. On note aussi $\exp(z) = e^z$.
- prolonge la fonction exponentielle réelle.
- Dérivée: $\frac{d}{dz} \exp z = \exp z$
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$

Exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- série entière, rayon convergence ∞. On note aussi $\exp(z) = e^z$.
- prolonge la fonction exponentielle réelle.
- Dérivée: $\frac{d}{dz} \exp z = \exp z$
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$
- (transp. suivant): Si $x = \Re z$ et $y = \Im z$: $e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$

Exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- série entière, rayon convergence ∞. On note aussi $\exp(z) = e^z$.
- prolonge la fonction exponentielle réelle.
- Dérivée: $\frac{d}{dz} \exp z = \exp z$
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$
- (transp. suivant): Si $x = \Re z$ et $y = \Im z$: $e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$
- $|e^z| = e^{\Re z}$. L'exponentielle complexe ne s'annule jamais.

Exponentielle complexe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- série entière, rayon convergence ∞. On note aussi $\exp(z) = e^z$.
- prolonge la fonction exponentielle réelle.
- Dérivée: $\frac{d}{dz} \exp z = \exp z$
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$
- (transp. suivant): Si $x = \Re z$ et $y = \Im z$: $e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$
- $|e^z| = e^{\Re z}$. L'exponentielle complexe ne s'annule jamais.
- Périodicité: $e^{z+\mathrm{i}2\pi} = e^z$

Prolongement des fonctions réelles

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- $\mathrm{ch}\ \mathrm{i}z = \cos z \quad \mathrm{sh}\ \mathrm{i}z = \mathrm{i} \sin z \quad \cos \mathrm{i}z = \mathrm{ch}\ z \quad \sin \mathrm{i}z = \mathrm{i}\ \mathrm{sh}\ z$
- Les formules de trigonométrie connues demeurent pour les fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (se résument en fait à $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$).
- Et pour le même prix, on (re)trouve les formules de trigonométrie hyperbolique. . .

Q: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 0$.

Q: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 0$.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$).

$$\cos z = 0 \iff \cos(x + \mathrm{i}y) = 0$$

Q: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 0$.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
\cos z = 0 &\iff \cos(x+\mathrm{i}y) = 0 \\
&\iff \cos(x)\cos(\mathrm{i}y) - \sin(x)\sin(\mathrm{i}y) = 0 \\
&\iff \cos(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{i}\sin(x)\mathrm{sh}(y) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \cos(x)\mathrm{ch}(y) = 0 \\ \sin(x)\mathrm{sh}(y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

<u>**Q**</u>: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 0$.
<u>Autre méthode</u>: On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$).

$$\cos z = 0 \iff \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}) = 0 \iff e^{2\mathrm{i}z} = -1$$

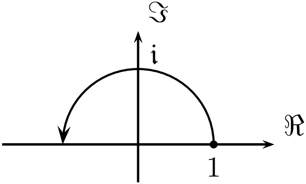
<u>Q</u>: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 0$.
<u>Autre méthode</u>: On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
\cos z = 0 &\iff \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}) = 0 \iff e^{2\mathrm{i}z} = -1 \\
&\iff e^{2\mathrm{i}x} e^{-2y} = -1 \\
&\iff \begin{cases} e^{-y} = 1 \\ 2x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

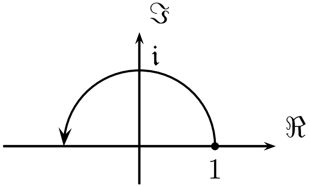
Enoncé: On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle unité.

1. Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_+$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan supérieur $\Im\{z\} \geq 0$. Même question avec le chemin $\mathcal{C}_-$ passant cette fois par le demi-plan $\Im\{z\} \leq 0$.
2. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z}$. Conclusion?
3. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Conclusion?

Q: Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_+$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan $\Im\{z\} \geq 0$.



Q: Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_+$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan $\Im\{z\} \geq 0$.



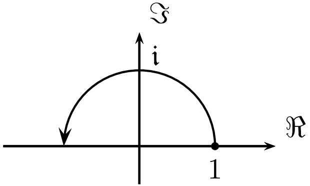
Définition

chemin: *fonction continue* $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$
lacet: *un chemin qui part et revient au même point* $(\gamma(t_0) = \gamma(t_1))$
intégrale le long de γ *(supposé* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux):*

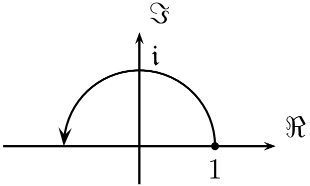
$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

Rq: Si γ est un lacet, on note parfois $\oint_\gamma f(z)\, dz$.

<u>Q</u>: Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_+$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan $\Im\{z\} \geq 0$.



Q: Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_+$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan $\Im\{z\} \geq 0$.



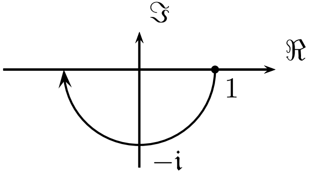
$$\int_{\mathcal{C}_+} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{\mathrm{i}t}}(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t})\, dt = \mathrm{i}\pi$$

où $\mathcal{C}_+ : [0, \pi] \to \mathbb{C}$

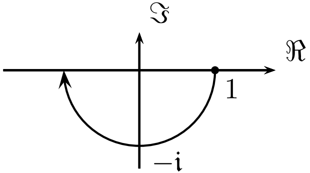
$$t \mapsto e^{\mathrm{i}t}$$

Rq: résultat identique si changement de paramétrisation

<u>Q</u>: Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_{-}$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan $\Im\{z\} \leq 0$.



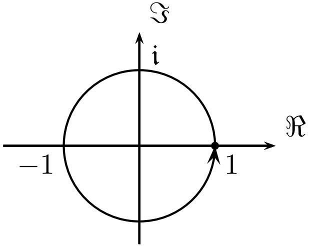
<u>Q</u>: Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_-$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan $\Im\{z\} \leq 0$.



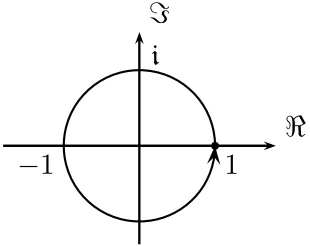
$$\int_{\mathcal{C}_-} \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{-\mathfrak{i}t}}(-\mathfrak{i}e^{-\mathfrak{i}t})\, dt = -\mathfrak{i}\pi$$

$$\begin{aligned} \text{où } \mathcal{C}_- :& [0,\pi] \to \mathbb{C} \\ & t \mapsto e^{-\mathfrak{i}t} \end{aligned}$$

Q: Calculer $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.



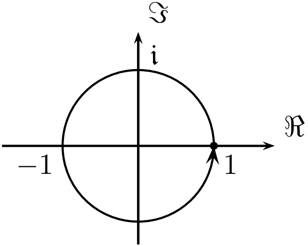
Q: Calculer $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.



$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(e^{\mathrm{i}t})^n} (\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t})\, dt = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} e^{-(n-1)\mathrm{i}t}\, dt$$

$$= \begin{cases} \mathrm{i}2\pi & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q: Conclusion?

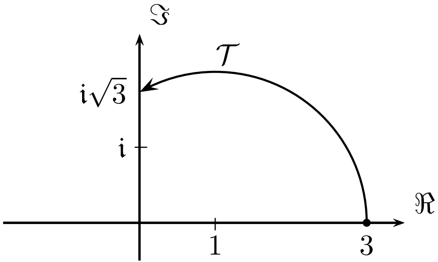


$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} \mathrm{i}2\pi & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

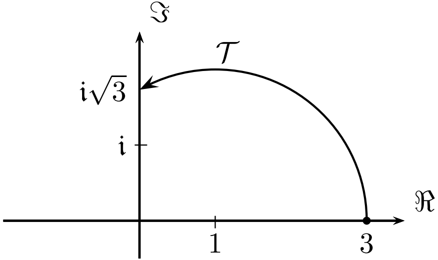
- Résidu?
- singularité?
- intégrale d'une fonction holomorphe?
- primitive?

Enoncé: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{T}} \frac{dz}{z^2}$ ou $\mathcal{T}$ est le chemin menant du point 3 au point $\mathrm{i}\sqrt{3}$ en passant par l'arc de cercle d'équation $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

<u>**Q**</u>: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{T}} \frac{dz}{z^2}$ ou $\mathcal{T}$ est le chemin menant de 3 à $\mathrm{i}\sqrt{3}$ en passant par l'arc de cercle d'équation $(x-1)^2+y^2=4$.



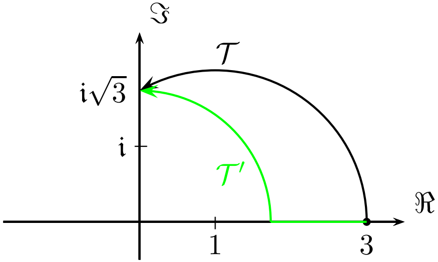
<u>Q</u>: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{T}} \frac{dz}{z^2}$ ou $\mathcal{T}$ est le chemin menant de 3 à $\mathrm{i}\sqrt{3}$ en passant par l'arc de cercle d'équation $(x-1)^2+y^2=4$.



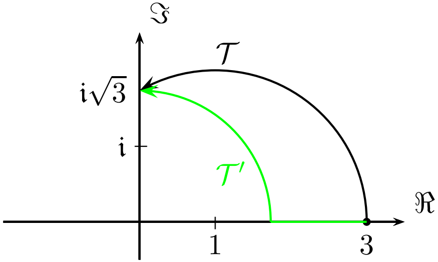
$$\int_{\mathcal{T}} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{2\pi/3} \frac{2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{(1+2e^{\mathrm{i}t})^2}\,dt = \left[-\frac{1}{1+2e^{\mathrm{i}t}}\right]_{t=0}^{t=2\pi/3}$$

$$= \cdots = \frac{1}{3} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$$

<u>Q</u>: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{T}'} \frac{dz}{z^2}$ ou $\mathcal{T}'$ est le chemin menant de 3 à $i\sqrt{3}$ dessiné en vert.

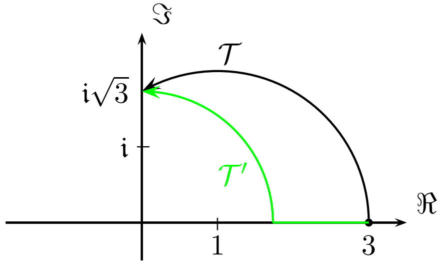


Q: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{T}'} \frac{dz}{z^2}$ ou $\mathcal{T}'$ est le chemin menant de 3 à $\mathrm{i}\sqrt{3}$ dessiné en vert.



$$\int_{\mathcal{T}} \frac{dz}{z^2} = \int_3^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{\left(\sqrt{3}e^{\mathrm{i}t}\right)^2}\, dt$$

$$= \cdots = \frac{1}{3} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$$



$$\int_{\mathcal{T}} \frac{dz}{z^2} = \left[-\frac{1}{z}\right]_{z=3}^{z=i\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}} = \int_{\mathcal{T}'} \frac{dz}{z^2}$$

Enoncé:

1. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en u: $e^u = z$.
2. On rappelle que les conditions de Cauchy s'écrivent en coordonnées polaires (pour une fonction $f = P + \mathrm{i}Q$):

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

   Déterminer les fonctions holomorphes dont la partie réelle est une fonction de r seulement.
3. Comment se définit un logarithme sur $\mathbb{C}$? Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme? Que peut-on dire concernant l'existence d'une primitive de $1/z$?

Q: Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en u: $e^u = z$.

Q: Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en u: $e^u = z$.

- si $z = 0$, pas de solution

Q: Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en u: $e^u = z$.

- si $z = 0$, pas de solution
- si $z \neq 0$, $z = re^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  En posant $u = x + \mathrm{i}y$:

$$e^u = z \iff e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Q: Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en u: $e^u = z$.

- si $z = 0$, pas de solution
- si $z \neq 0$, $z = re^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  En posant $u = x + \mathrm{i}y$:

$$\begin{aligned} e^u = z &\iff e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &\iff \begin{cases} x = \ln r \\ y = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff u = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Q: Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en u: $e^u = z$.

- si $z = 0$, pas de solution
- si $z \neq 0$, $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
  En posant $u = x + iy$:

$$\begin{aligned} e^u = z &\iff e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &\iff \begin{cases} x = \ln r \\ y = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff u = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Sur $\mathbb{C}$, fonction réciproque de $z \mapsto e^z$ non définie en $z = 0$ et peut prendre l'infinité de valeurs:

$$z \mapsto \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(fonction *multiforme* ou *multivaluée*)

Q: Déterminer les fonctions holomorphes $F(z)$ dont la partie réelle est une fonction de r seulement.
Rappel: conditions de Cauchy: $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$

Q: Déterminer les fonctions holomorphes $F(z)$ dont la partie réelle est une fonction de r seulement.

Rappel: conditions de Cauchy: $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$

Si $P(r, \theta) = p(r)$ indépendant de θ:

$\Rightarrow$ (2è cond. Cauchy) $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ donc $Q(r, \theta) = q(\theta)$

Q: Déterminer les fonctions holomorphes $F(z)$ dont la partie réelle est une fonction de r seulement.

Rappel: conditions de Cauchy: $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$

Si $P(r,\theta) = p(r)$ indépendant de θ:

$\Rightarrow$ (2è cond. Cauchy) $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ donc $Q(r,\theta) = q(\theta)$

$\Rightarrow$ (1è cond. Cauchy) $rp'(r) = q'(\theta) = K$ où K réel.

<u>**Q**</u>: Déterminer les fonctions holomorphes $F(z)$ dont la partie réelle est une fonction de r seulement.

<u>Rappel</u>: conditions de Cauchy: $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$

Si $P(r,\theta) = p(r)$ indépendant de θ:

$\Rightarrow$ (2è cond. Cauchy) $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ donc $Q(r,\theta) = q(\theta)$

$\Rightarrow$ (1è cond. Cauchy) $rp'(r) = q'(\theta) = K$ où K réel.

$\Rightarrow$ $\begin{cases} p(r) = K \ln|r| + L \\ q(\theta) = K\theta + M \end{cases}$ avec M, L réels.

Q: Déterminer les fonctions holomorphes $F(z)$ dont la partie réelle est une fonction de r seulement.

Rappel: conditions de Cauchy: $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$

Si $P(r,\theta) = p(r)$ indépendant de θ:

$\Rightarrow$ (2è cond. Cauchy) $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ donc $Q(r,\theta) = q(\theta)$

$\Rightarrow$ (1è cond. Cauchy) $rp'(r) = q'(\theta) = K$ où K réel.

$\Rightarrow \begin{cases} p(r) = K \ln |r| + L \\ q(\theta) = K\theta + M \end{cases}$ avec M, L réels.

$\Rightarrow$ $F(z) = K(\ln r + \mathrm{i}\theta) + z_0$ où $z_0 = M + \mathrm{i}L$

<u>**Q**</u>: Déterminer les fonctions holomorphes $F(z)$ dont la partie réelle est une fonction de r seulement.

<u>Rappel</u>: conditions de Cauchy: $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$

Si $P(r,\theta) = p(r)$ indépendant de θ:

$\Rightarrow$ (2è cond. Cauchy) $\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$ donc $Q(r,\theta) = q(\theta)$

$\Rightarrow$ (1è cond. Cauchy) $rp'(r) = q'(\theta) = K$ où K réel.

$\Rightarrow$ $\begin{cases} p(r) = K\ln|r| + L \\ q(\theta) = K\theta + M \end{cases}$ avec M, L réels.

$\Rightarrow$ $F(z) = K(\ln r + \mathrm{i}\theta) + z_0$ où $z_0 = M + \mathrm{i}L$

$\Rightarrow$ On retrouve la fonction:

$$z \mapsto \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$$

Domaine? Continuité? Holomorphie?

Q: Comment se définit un logarithme sur $\mathbb{C}$? Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme? Que peut-on dire concernant l'existence d'une primitive de $1/z$?

<u>Q</u>: Comment se définit un logarithme sur $\mathbb{C}$? Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme? Que peut-on dire concernant l'existence d'une primitive de $1/z$?

- Une détermination du logarithme sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe $L : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{L(z)} = z$$

Q: Comment se définit un logarithme sur $\mathbb{C}$? Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme? Que peut-on dire concernant l'existence d'une primitive de $1/z$?

- Une détermination du logarithme sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe $L : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{L(z)} = z$$

- Conséquence: $L'(z) = \frac{1}{z}$

<u>Q</u>: Comment se définit un logarithme sur $\mathbb{C}$? Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme? Que peut-on dire concernant l'existence d'une primitive de $1/z$?

- Une détermination du logarithme sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe $L : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{L(z)} = z$$

- Conséquence: $L'(z) = \frac{1}{z}$
- Domaine de L? Continuité? Holomorphie?

Q: Comment se définit un logarithme sur $\mathbb{C}$? Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme? Que peut-on dire concernant l'existence d'une primitive de $1/z$?

- Une détermination du logarithme sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe $L : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{L(z)} = z$$

- Conséquence: $L'(z) = \frac{1}{z}$
- Domaine de L? Continuité? Holomorphie?
- La détermination principale du logarithme:

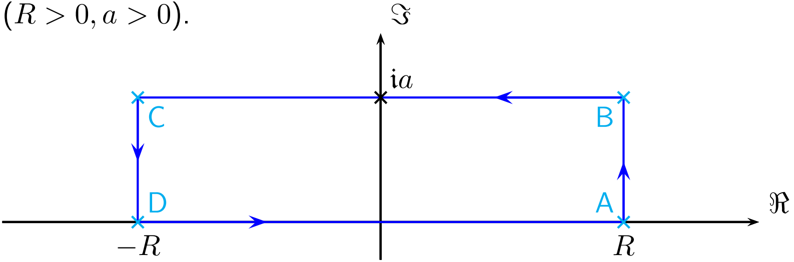
$$\begin{aligned} \log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- &\to \mathbb{C} \\ z = re^{\mathrm{i}\theta} &\mapsto \ln r + \mathrm{i}\theta \quad \text{où } r > 0 \text{ et } |\theta| < \pi \end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}_+$, $\log x = \ln x$.

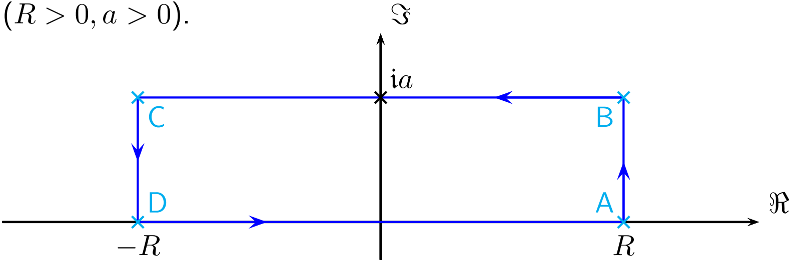
Enoncé: On rappelle: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

1. Calculer $\int_\Gamma e^{-z^2}\, dz$ où Γ est le circuit (fermé) constitué des segments reliant les point $R, R + \mathrm{i}a, -R + \mathrm{i}a, -R$ (et retour en R) où $R > 0, a > 0.$
2. Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\, dx$ ne dépend pas de a.
3. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax\, dx$

Q: Calculer $\int_\Gamma e^{-z^2}\, dz$ où Γ est le circuit ABCD fermé ci-dessous $(R > 0, a > 0)$.



Q: Calculer $\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz$ où Γ est le circuit ABCD fermé ci-dessous $(R > 0, a > 0)$.



Indication:

- Ecrire la définition de l'intégrale le long du lacet.
- Utiliser une propriété pour le calculer.

La méthode suivie dans l'exercice utilise l'égalité entre les deux...

- $z \mapsto e^{-z^2}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ entraîne $\displaystyle\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz = 0.$

- $z \mapsto e^{-z^2}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ entraîne $\displaystyle\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz = 0$.
- D'autre part:
$$\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz = \int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz$$

- $z \mapsto e^{-z^2}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ entraîne $\displaystyle\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz = 0$.
- D'autre part:
$$\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz = \int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz$$
En prenant une paramétrisation de chaque segment:

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz = \int_0^a e^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{i}\,dy$$
$$\int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz = -\int_{-R}^R e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\,dx$$
$$\int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz = -\int_0^a e^{-(-R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{i}\,dy$$
$$\int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = \int_{-R}^R e^{-x^2}\,dx$$

- $z \mapsto e^{-z^2}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ entraîne $\displaystyle\int_\Gamma e^{-z^2}\, dz = 0$.
- D'autre part:
$$\int_\Gamma e^{-z^2}\, dz = \int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\, dz$$
En prenant une paramétrisation de chaque segment:
$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\, dz = \int_0^a e^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{i}\, dy$$
$$\int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\, dz = -\int_{-R}^{R} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\, dx$$
$$\int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\, dz = -\int_0^a e^{-(-R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{i}\, dy$$
$$\int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\, dz = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx$$
- Dans la suite, utiliser l'égalité entre les deux...

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

Q: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

Q: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx \qquad \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

Q: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz = -\int_{-R}^{R} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\,dx \qquad \xrightarrow[R\to+\infty]{} -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\,dx$$

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

Q: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz = \int_0^a e^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{i}\,dy$$

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

<u>Q</u>: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\left|\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz\right| \leq \int_0^a |e^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{i}|\,dy$$

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

Q: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz\right| &\leq \int_0^a |e^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{i}|\,dy \\ &\leq e^{-R^2}\int_0^a e^{y^2}\,dy\end{aligned}$$

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\, dz = 0$$

Q: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\, dx$ ne dépend pas de a.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\, dz \right| &\leq \int_0^a |e^{-(R+iy)^2} i|\, dy \\ &\leq e^{-R^2} \int_0^a e^{y^2}\, dy \qquad \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

Q: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz = -\int_0^a e^{-(-R+\mathrm{i}y)^2}\mathrm{i}\,dy \qquad \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz + \int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz = 0$$

<u>Q</u>: Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathsf{AB}} e^{-z^2}\,dz &= \int_0^a e^{-(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{i}\,dy && \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0\\
\int_{\mathsf{BC}} e^{-z^2}\,dz &= -\int_{-R}^{R} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\,dx && \xrightarrow[R\to+\infty]{} -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\,dx\\
\int_{\mathsf{CD}} e^{-z^2}\,dz &= -\int_0^a e^{-(-R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{i}\,dy && \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0\\
\int_{\mathsf{DA}} e^{-z^2}\,dz &= \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx && \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $a \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\mathrm{i}a)^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

ce qui s'écrit aussi sous la forme (noter la transf. Fourier!):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2\mathrm{i}ax}\, dx = \sqrt{\pi} e^{-a^2}$$

Q: En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax \; dx$

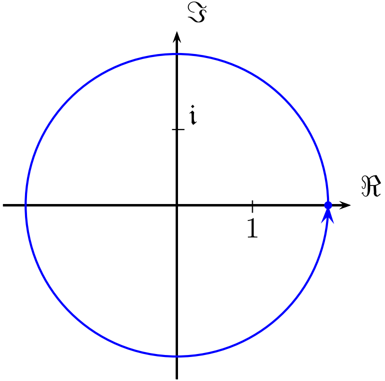
<u>Q</u>: En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax \; dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax \; dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos ax \; dx \\
&= \Re\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{\mathrm{i}ax} \; dx\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4}
\end{aligned}$$

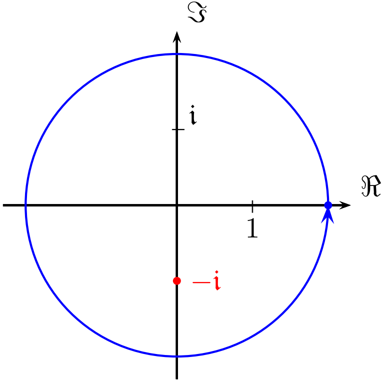
Enoncé: Calculer:

1. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.
2. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2+9}\, dz$ où $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z - 2\mathrm{i}| = 4\}$.
3. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z+1}{z^4+2\mathrm{i}z^3}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle unité.
4. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^3+3}{z(z-\mathrm{i})^2}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est un circuit en 8 qui entoure les points i et 0 dans chacune de ses boucles (dessin à faire).

Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.



Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.



La fonction est holomorphe partout, sauf en $z = -\mathrm{i}$ qui est un pôle. C'est une application du **théorème des résidus**...

Théorème des résidus

- **Résidu** de f en a:

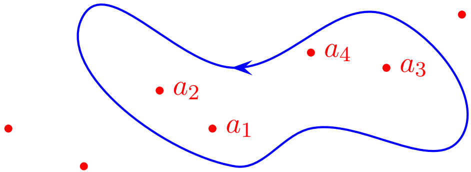
$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\oint_{\mathcal{C}_a} f(z)\,dz \qquad \mathcal{C}_a\text{: lacet «autour de } a \text{ seulement»}$$

Théorème des résidus

- **Résidu** de f en a:

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\oint_{\mathcal{C}_a} f(z)\,dz \qquad \mathcal{C}_a\text{: lacet «autour de } a \text{ seulement»}$$

- Ω ouvert simplement connexe; f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_i\}_i$.
  γ lacet qui entoure (sens trigonométrique) les singularités $\{a_i\}_{i=1}^n$.



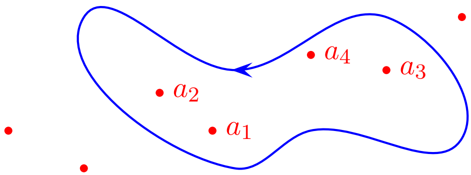
$$\frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f,a_i)$$

Théorème des résidus

- **Résidu** de f en a:

$$\text{Res}(f,a) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi} \oint_{\mathcal{C}_a} f(z)\, dz \qquad \mathcal{C}_a\text{: lacet «autour de } a \text{ seulement»}$$

- Ω ouvert simplement connexe; f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_i\}_i$.
  γ lacet qui entoure (sens trigonométrique) les singularités $\{a_i\}_{i=1}^n$.



$$\frac{1}{\mathrm{i}2\pi} \oint_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \text{Res}(f, a_i)$$

- Reste à savoir calculer ce résidu pour que ce soit pratique...

Différentes singularités

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sauf en un point $a \in \Omega$ (**singularité**)

- si $\lim_{z \to a} |f(z)|$ est fini: **fausse singularité**, on montre que f prolongeable par continuité et f est alors holomorphe en a.
  Ex: $\frac{\sin z}{z}$ en $z = 0$.

Différentes singularités

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sauf en un point $a \in \Omega$ (**singularité**)

- si $\lim_{z\to a} |f(z)|$ est fini: **fausse singularité**, on montre que f prolongeable par continuité et f est alors holomorphe en a.
  Ex: $\frac{\sin z}{z}$ en $z = 0$.
- si $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$: **pôle**

Différentes singularités

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sauf en un point $a \in \Omega$ (**singularité**)

- si $\lim_{z\to a} |f(z)|$ est fini: **fausse singularité**, on montre que f prolongeable par continuité et f est alors holomorphe en a.
  Ex: $\frac{\sin z}{z}$ en $z = 0$.
- si $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$: **pôle**
- si $\lim_{z\to a} |f(z)|$ n'existe pas: **singularité essentielle**
  Ex: $e^{1/z}$ en $z = 0$.

Résidu en un pôle

a un pôle (isolé) de f.

On montre (en utilisant holomorphie de $\frac{1}{f(z)}$ puisque $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$):

- **Ordre** m du pôle a: tel que

$$\lim_{z\to a}|(z-a)^p f(z)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } p < m, \\ 0 & \text{si } p > m. \end{cases}$$

Résidu en un pôle

a un pôle (isolé) de f.

On montre (en utilisant holomorphie de $\frac{1}{f(z)}$ puisque $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$):

- **Ordre** m du pôle a: tel que

  $$\lim_{z\to a} |(z-a)^p f(z)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } p < m, \\ 0 & \text{si } p > m. \end{cases}$$

- $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$ où f_1 holomorphe en a, $f_1(a) \neq 0$.

Résidu en un pôle

a un pôle (isolé) de f.

On montre (en utilisant holomorphie de $\frac{1}{f(z)}$ puisque $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$):

- **Ordre** m du pôle a: tel que

$$\lim_{z\to a}|(z-a)^p f(z)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } p < m, \\ 0 & \text{si } p > m. \end{cases}$$

- $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$ où f_1 holomorphe en a, $f_1(a) \neq 0$.
- f admet un développement en **série de Laurent**:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Résidu en un pôle

a un pôle (isolé) de f.

On montre (en utilisant holomorphie de $\frac{1}{f(z)}$ puisque $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$):

- **Ordre** m du pôle a: tel que

$$\lim_{z\to a} |(z-a)^p f(z)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } p < m, \\ 0 & \text{si } p > m. \end{cases}$$

- $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$ où f_1 holomorphe en a, $f_1(a) \neq 0$.
- f admet un développement en **série de Laurent**:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

- **Résidu**: (en se rappelant les calculs exercice 4)

$$\operatorname{Res}(f, a) = c_{-1}$$

Résidu en un pôle

a un pôle (isolé) de f.

On montre (en utilisant holomorphie de $\frac{1}{f(z)}$ puisque $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$):

- **Ordre** m du pôle a: tel que

$$\lim_{z\to a}|(z-a)^p f(z)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } p < m, \\ 0 & \text{si } p > m. \end{cases}$$

- $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$ où f_1 holomorphe en a, $f_1(a) \neq 0$.
- f admet un développement en **série de Laurent**:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

- **Résidu**: (en se rappelant les calculs exercice 4)

$$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1}$$

- Formule générale:

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right]$$

Résidu en un pôle simple

a un pôle (isolé) de f d'**ordre un** $(m = 1)$

- f admet un développement en **série de Laurent**:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Résidu en un pôle simple

a un pôle (isolé) de f d'**ordre un** $(m = 1)$

- f admet un développement en **série de Laurent**:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

- **Résidu**:

$$\mathrm{Res}(f, a) = c_{-1} = \lim_{z \to a} [(z-a)f(z)]$$

Résidu en un pôle simple

a un pôle (isolé) de f d'**ordre un** $(m=1)$

- f admet un développement en **série de Laurent**:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

- **Résidu**:

$$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1} = \lim_{z\to a} \left[(z-a)f(z)\right]$$

- Formule parfois utile:

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{N(a)}{D'(a)}$$

où $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ avec $N(a) \neq 0$.

Résidu en un pôle simple

a un pôle (isolé) de f d'**ordre un** $(m = 1)$

- f admet un développement en **série de Laurent**:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

- **Résidu**:

$$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1} = \lim_{z \to a} \left[(z-a)f(z)\right]$$

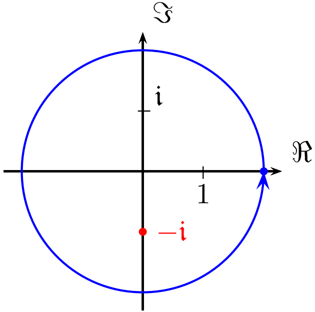
- Formule parfois utile:

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{N(a)}{D'(a)}$$

  où $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ avec $N(a) \neq 0$.

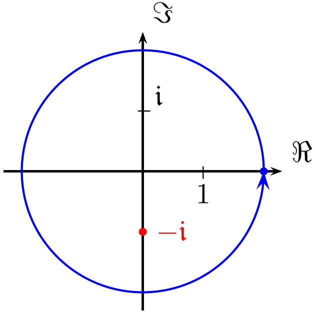
- ATTENTION: formules non valables pour un pôle multiple!

Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.



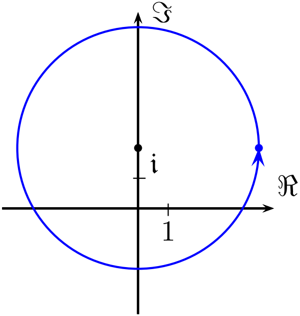
Fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ (pôle simple)

Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2.

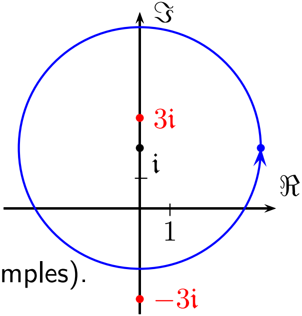


Fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ (pôle simple)

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\, dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}(f, -\mathrm{i}) = \mathrm{i}2\pi[z^2-4z+4]_{z=-\mathrm{i}}$$
$$= 2\pi(-4+3\mathrm{i})$$



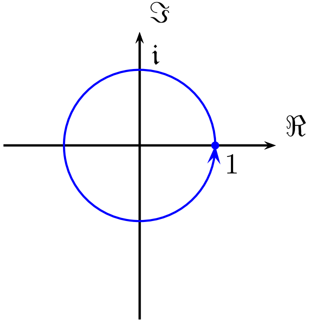
Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2+9}\, dz$ où $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z - 2\mathfrak{i}| = 4\}$.



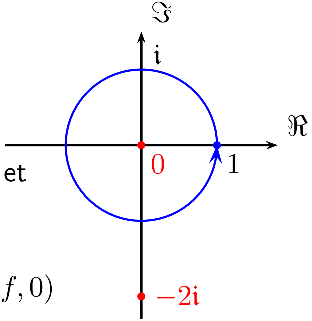
Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2+9}\, dz$ où $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z - 2\mathrm{i}| = 4\}$.
Fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\}$ (pôles simples).

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2+9}\, dz &= \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}(f, 3\mathrm{i}) \\ &= \mathrm{i}2\pi\Big[\frac{z}{z+3\mathrm{i}}\Big]_{z=3\mathrm{i}} \\ &= \mathrm{i}\pi\end{aligned}$$

Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z+1}{z^4+2iz^3}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle unité.

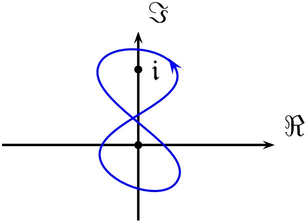


Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z+1}{z^4+2\mathrm{i}z^3}\,dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle unité.
Fonction holomorphe sauf en 0 (pôle triple) et $-2\mathrm{i}$ (pôle simple).

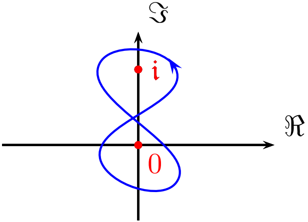


$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{z+1}{z^4+2\mathrm{i}z^3}\,dz &= \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}(f,0)\\ &= \mathrm{i}2\pi \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z+1)}{(z+2\mathrm{i})}\right]_{z=0}\\ &= \frac{\pi}{4}(2\mathrm{i}-1)\end{aligned}$$

Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^3+3}{z(z-\mathrm{i})^2}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est un circuit en 8 ci-dessous.



Q: $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^3+3}{z(z-\mathfrak{i})^2}\, dz$ où $\mathcal{C}$ est un circuit en 8 ci-dessous.



Fonction holomorphe sauf en 0 (pôle simple) et $\mathfrak{i}$ (pôle double). En veillant au sens de rotation (indice du lacet par rapport au point):

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{z^3+3}{z(z-\mathfrak{i})^2}\, dz &= \mathfrak{i}2\pi\Big(\mathrm{Res}(f,\mathfrak{i}) - \mathrm{Res}(f,0)\Big) \\ &= \dots \\ &= 4\pi(3\mathfrak{i}-1)\end{aligned}$$

Enoncé: Calculer:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad (n \geq 2)$$

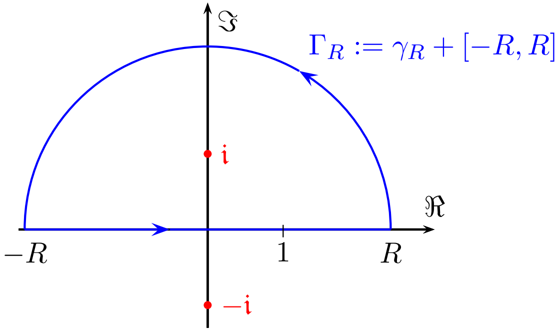
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(1+x^n)}\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha < 1)$$

Q: Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

- décomposer en éléments simples (pour les courageux...)

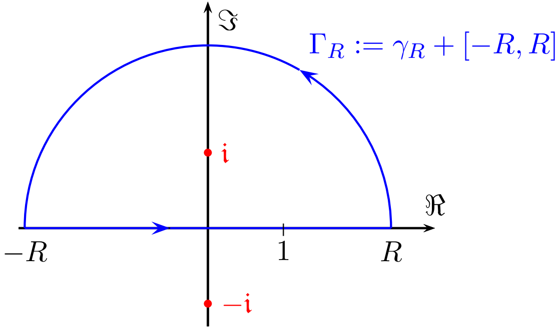
Q: Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

- décomposer en éléments simples (pour les courageux...)
- ou utiliser le théorème des résidus. $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$



Q: Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

- décomposer en éléments simples (pour les courageux...)
- ou utiliser le théorème des résidus. $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$



- et calculer $\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz$ de deux façons différentes...

- Par les résidus:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \mathfrak{i}2\pi\mathrm{Res}\left(f,\mathfrak{i}\right)$$

- Par les résidus:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \mathfrak{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f, \mathfrak{i}) = \frac{\pi}{2}$$

- Calcul du résidu:
  - formule (pôle double)

- Par les résidus:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f,\mathrm{i}) \;= \frac{\pi}{2}$$

- Calcul du résidu:
    - formule (pôle double)
    - Développement asymptotique de f en $z=\mathrm{i}$ (en posant $z=\mathrm{i}+u$):

$$f(\mathrm{i}+u) = \frac{1}{(1+(\mathrm{i}+u)^2)^2} = \frac{1}{(2\mathrm{i}u+u^2)^2} = \frac{-1}{4u^2}\frac{1}{(1+\frac{u}{2\mathrm{i}})^2}$$
$$= \frac{-1}{4u^2}\left(1-2\frac{u}{2\mathrm{i}}+\dots\right) = -\frac{1}{4u^2}+\frac{1}{4\mathrm{i}u}+\dots$$

d'où on peut lire: $\mathrm{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{1}{4\mathrm{i}}$

- Paramétrisation du lacet:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz$$

- Paramétrisation du lacet:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz$$

- Faire tendre la taille du lacet vers l'infini:

- Paramétrisation du lacet:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz$$

- Faire tendre la taille du lacet vers l'infini:
  -

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$

- Paramétrisation du lacet:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz$$

- Faire tendre la taille du lacet vers l'infini:
  - $$\int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \xrightarrow[R \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$
  - Majoration (lemme de Jordan):

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

Lemme de Jordan

Sous les hypothèses:

- f est continue en tout z de module assez grand dans le secteur angulaire $\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$
- $zf(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$
- chemin défini par l'arc de cercle $\gamma_r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$

On a:

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

Lemme de Jordan

Sous les hypothèses:

- f est continue en tout z de module assez grand dans le secteur angulaire $\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$
- $zf(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$
- chemin défini par l'arc de cercle $\gamma_r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$

On a:

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

Preuve: $\epsilon > 0$ fixé et $R > 0$ choisi tel que $|zf(z)| \leq \epsilon$ dès que $r > R$.
Alors, avec $r > R$:

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(re^{\mathrm{i}t}) \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}\, dt \right| \leq L(\gamma_r)\frac{\epsilon}{r} \leq 2\pi\epsilon$$

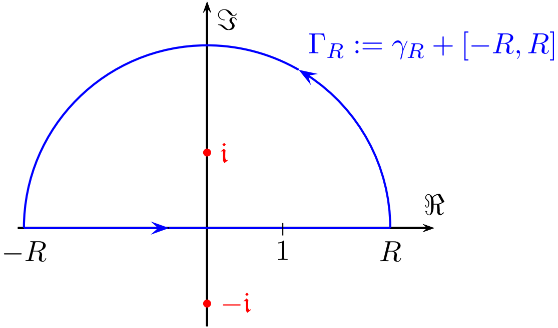
Résumé et conclusion:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz &= \mathfrak{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f,\mathfrak{i}) = \frac{\pi}{2} \\ &= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0}\end{aligned}$$

et donc:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Q: Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2}\, dx$



- $f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}kz}}{1+z^2}$

- $f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}kz}}{1+z^2}$
-

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f,\mathrm{i}) = \mathrm{i}2\pi \frac{e^{\mathrm{i}^2 k}}{2\mathrm{i}} = \pi e^{-k}$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\,dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\,dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad ?}$$

lemme Jordan ?

- $f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}kz}}{1+z^2}$
- $$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f, \mathrm{i}) = \mathrm{i}2\pi \frac{e^{\mathrm{i}^2 k}}{2\mathrm{i}} = \pi e^{-k}$$
$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\, dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\, dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\, dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad ?}$$
lemme Jordan ?
- Lemme de Jordan applicable si $|zf(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$

- $f(z) = \frac{e^{ik z}}{1+z^2}$
-

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f, \mathrm{i}) = \mathrm{i}2\pi \frac{e^{\mathrm{i}^2 k}}{2\mathrm{i}} = \pi e^{-k}$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\, dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad ?}$$

lemme Jordan ?

- Lemme de Jordan applicable si $|zf(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$

$$|zf(z)| = \left|\frac{(x+\mathrm{i}y)e^{\mathrm{i}k(x+\mathrm{i}y)}}{1+(x+\mathrm{i}y)^2}\right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}e^{-ky}}{|1-(x^2+y^2)|} \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0 \text{ pour } k \geq 0$$

- $f(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2}$

- $f(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2}$
- Pour $k \geq 0$:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f, \mathrm{i}) = \mathrm{i}2\pi \frac{e^{\mathrm{i}^2 k}}{2\mathrm{i}} = \pi e^{-k}$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\, dz}_{\substack{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \\ \text{(lemme Jordan)}}}$$

et donc: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-k}$ si $k \geq 0$

- $f(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2}$
- Pour $k \geq 0$:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f, \mathrm{i}) = \mathrm{i}2\pi \frac{e^{\mathrm{i}^2 k}}{2\mathrm{i}} = \pi e^{-k}$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\, dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\, dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\, dz}_{\substack{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \\ \text{(lemme Jordan)}}}$$

et donc: $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-k} \text{ si } k \geq 0$$

- Par symétrie et en prenant la partie réelle, pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}kx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|k|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2}\, dx$$

- $f(z) = \frac{e^{ikz}}{1+z^2}$
- Pour $k \geq 0$:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \mathrm{i}2\pi \mathrm{Res}\,(f, \mathrm{i}) = \mathrm{i}2\pi \frac{e^{\mathrm{i}^2 k}}{2\mathrm{i}} = \pi e^{-k}$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\, dz}_{\substack{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \\ \text{(lemme Jordan)}}}$$

et donc: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-k}$ si $k \geq 0$

- Par symétrie et en prenant la partie réelle, pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|k|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2}\, dx$$

- Pour $k \leq 0$, on aurait pu prendre le lacet qui ferme par le demi-cercle inférieur.

Autres calculs faisables à l'aide du théorème des résidus:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad (n \geq 2)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}\, dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(1+x^n)}\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha < 1)$$

Section 3

Séries de Fourier

Série de Fourier

Soit f fonction 2π-périodique:

Coefficients de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,dx$$

$(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définis dès que f intégrable sur $[0,2\pi]$, donc par ex:

- $f \in L^1(0,2\pi)$,
- $f \in L^2(0,2\pi)$ (puisque $L^2(0,2\pi) \subset L^1(0,2\pi)$),
- f continue par morceaux.

Série de Fourier

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nx}$$

Série de Fourier

Pour f fonction 2π-périodique:

Coefficients de Fourier $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

- Lien avec les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{aligned} a_n &= c_{-n} + c_n & c_n &= (a_n - \mathrm{i}b_n)/2 \\ b_n &= (c_{-n} - c_n)/\mathrm{i} & c_{-n} &= (a_n + \mathrm{i}b_n)/2 \end{aligned}$$

Série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \qquad \left(= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \right)$$

Série de Fourier dans L^2

Pour $f \in L^2(0, 2\pi)$:

- Produit scalaire: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)^* \, dx$
- La famille $(x \mapsto e^{\mathrm{i}nx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée.
  - inégalité de Bessel,
  - approximation de f par un polynôme trigonométrique donné par troncature de la série de Fourier.

Relation de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

$\rightsquigarrow$ donne la convergence de la série vers f au sens $\|.\|_2$

➤ $L^2(0, 2\pi)$ est un espace de Hilbert.

Représentation ponctuelle

- Convergence dans L^2 donne égalité presque partout (et non pas ponctuelle)!
- Existence des coefficients de Fourier pour $f \in L^1(0, 2\pi)$, $f \notin L^2(0, 2\pi)$ non nécessaire.

$\rightsquigarrow$ Hypothèses pour une représentation ponctuelle? Type de convergence?

Theorem (Dirichlet)

Si f est C^1 par morceaux et 2π-périodique, alors:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

Formulaire série de Fourier

Fonction f T-périodique

Coefficients et série de Fourier, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-\mathrm{i}\omega n x}\, dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\omega n x)\, dx \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\omega n x)\, dx$$

série Fourier: $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}\omega n x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)$$

- Lien entre les $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Relation de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

Enoncé: Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. En déduire la somme des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Coefficients de Fourier

Fonction paire $\rightarrow$ développement $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ où:

$$\forall n \geq 1 \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0 \quad \text{(parité)}$$

$$\forall n \geq 0 \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$

$$\forall n > 0 \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{n}x\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{4}{n\pi}\left[x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

Théorème de Dirichlet

- Fonction continue et C^1 par morceaux, donc:

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \qquad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)\,.$$

➤ En $x = \pi$, il vient:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

➤ En $x = 0$, il vient:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Relation de Parseval

Dans $L^2(-\pi,\pi)$, l'égalité de Parseval donne:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4} \text{ et donc:}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Enoncé: Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, \pi[$ et soit g définie par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Déterminer les séries de Fourier de f et g.
2. En déduire que $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Coefficients de Fourier

Série de Fourier de f: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$
\begin{aligned}
\forall n \geq 0, \quad a_n &= 0 \quad \text{car } f \text{ est impaire.}\\
\forall n \geq 1, \quad b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(nx)\,dx\\
&= \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(-\sin nx)\,dx\\
&= \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\\
&= \frac{-\cos n\pi + 1}{n} + \frac{1}{\pi}\pi\frac{\cos n\pi}{n}\\
\forall n \geq 1, \quad b_n &= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Coefficients de Fourier

Série de Fourier de g: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin n}{n}\cos(nx)$

$\forall n \geq 1, \quad b_n = 0$ car g est paire (vérification aisée).

$$\begin{aligned}\forall n \geq 0 \quad a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+1)\cos(nx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-1)\cos(nx)\,dx\end{aligned}$$

Changement de variable (bornes identiques car 2π-périodicité):

$$\begin{aligned}\forall n \geq 0, \quad a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu-n)\,du - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu+n)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)[\cos(nu-n) - \cos(nu+n)]\,du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\sin n\sin(nu)\,du \quad \text{car } \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} \\ &= \frac{2\sin n}{n} \text{ si } n \neq 0 \text{ et } a_0 = 0\,.\end{aligned}$$

Théorème de Dirichlet

Série de Fourier de f: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$

f est C^1 par morceaux; le théorème de Dirichlet en $x = 1$ donne:

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2} = f(1)\,.$$

Relation de Parseval

Série de Fourier de g: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin n}{n} \cos(nx)$

g est C^0 par morceaux, la relation de Parseval donne:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2\sin n}{n} \right)^2$$

Pour le calcul de l'intégrale, on vérifie:

$$g(x) = \begin{cases} \pi - 1 & \text{si } x \in]0, 1[\\ -1 & \text{si } x \in]1, \pi - 1[\\ -1 & \text{si } x \in]\pi - 1, \pi[\end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir

$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \, dx = 2 \int_0^{\pi} |g(x)|^2 \, dx = 2[(\pi - 1)^2 + (\pi - 1)] = 2\pi(\pi - 1)$.

Enfin:

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 = \frac{1}{4\pi} 2\pi(\pi - 1) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Enoncé: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. On note $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier (notation usuelle).

1. Montrer que $c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.
2. On suppose f est C^k (k fois continûment dérivable, $k \geq 1$). Etablir une relation entre les coefficients de Fourier de f et de $f^{(k)}$.
3. En déduire que si f est C^∞, alors $c_n(f) = o(1/n^k)$ pour tout entier k.
4. Réciproquement, on suppose que, pour tout entier k, $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n| \to +\infty$. On pose $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$.
   1. Démontrer que S est C^∞ et calculer les coefficients de Fourier de $S^{(k)}$ en fonction de ceux de S.
   2. Démontrer que deux fonctions continues qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales (utiliser le théorème de Parseval).
   3. En déduire que $f = S$ et donc que f est de classe C^∞.
5. Résumer le théorème démontré dans cet exercice.

Section 4

Transformée de Fourier

Enoncé: On note $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformation de Fourier. Dans tout l'exercice, on veillera à préciser le cadre fonctionnel des transformées que l'on écrira.

1. Calculer la transformée de Fourier de $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. En déduire les transformées de Fourier de:
$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g_{A,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-b| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
4. Calculer $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right]$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$.
5. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^3 dx$.
6. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x}\, dx$ (préciser la définition).
7. Calculer $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$ et retrouver $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$ (en utilisant un résultat différent de celui utilisé précédemment).
8. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^4 dx$.

Transformée de Fourier

- Pour toute fonction f, transformée de Fourier notée $\hat{f}$
- opérateur de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx$$

noté aussi $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$ ou encore $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}(\nu)$

Transformée de Fourier

- Pour toute fonction f, transformée de Fourier notée $\hat{f}$
- opérateur de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx$$

  noté aussi $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$ ou encore $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}(\nu)$
- opérateur de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}} : f \mapsto \check{f}$

$$\check{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{+\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx$$

Transformée de Fourier

- Pour toute fonction f, transformée de Fourier notée $\hat{f}$
- opérateur de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx$$

  noté aussi $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$ ou encore $f(t) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}(\nu)$
- opérateur de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}} : f \mapsto \check{f}$

$$\check{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx$$

- ν est appelé **fréquence**
- **Rq**: variables sous les intégrales sont muettes, opérateur de Fourier inverse souvent utilisé en intégrant sur les fréquences

Q: Calculer la transformée de Fourier de $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

<u>Q</u>: Calculer la transformée de Fourier de $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx \\
&= \left[\frac{e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}}{-\mathrm{i}2\pi\nu} \right]_{x=-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \qquad \text{sinus cardinal!}
\end{aligned}$$

Existence de la TF: avait-on le droit de faire ainsi? Et pour $\nu = 0$?

TF dans $L^1(\mathbb{R})$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, càd aussi f est intégrable (sens Lebesgue, donc absolument).

TF dans $L^1(\mathbb{R})$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, càd aussi f est intégrable (sens Lebesgue, donc absolument).
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:

TF dans $L^1(\mathbb{R})$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, càd aussi f est intégrable (sens Lebesgue, donc absolument).
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:
  - $\displaystyle\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)e^{-i2\pi\nu x}}_{\text{intégrable car } \in L^1(\mathbb{R})!} \, dx$ existe pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.

TF dans $L^1(\mathbb{R})$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, càd aussi f est intégrable (sens Lebesgue, donc absolument).
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:
  - $\hat{f}(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}}_{\text{intégrable car } \in L^1(\mathbb{R})!} \, dx$ existe pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
  - $\hat{f}(\nu)$ est continue

TF dans $L^1(\mathbb{R})$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, càd aussi f est intégrable (sens Lebesgue, donc absolument).
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:
  - $\displaystyle\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)e^{-i2\pi\nu x}}_{\text{intégrable car } \in L^1(\mathbb{R})!} \quad dx$ existe pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
  - $\hat{f}(\nu)$ est continue
  - $\lim_{\nu\to\pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$

TF dans $L^1(\mathbb{R})$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, càd aussi f est intégrable (sens Lebesgue, donc absolument).
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:
  - $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)e^{-i2\pi\nu x}}_{\text{intégrable car } \in L^1(\mathbb{R})!} \, dx$ existe pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
  - $\hat{f}(\nu)$ est continue
  - $\lim_{\nu\to\pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$
  - $\hat{f}(\nu)$ est bornée

TF dans $L^1(\mathbb{R})$

- $f \in L^1(\mathbb{R})$ signifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$, càd aussi f est intégrable (sens Lebesgue, donc absolument).
- Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:
  - $\hat{f}(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x)e^{-i2\pi\nu x}}_{\text{intégrable car } \in L^1(\mathbb{R})!} \, dx$ existe pour tout $\nu \in \mathbb{R}$.
  - $\hat{f}(\nu)$ est continue
  - $\lim_{\nu\to\pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$
  - $\hat{f}(\nu)$ est bornée
  - **mais** a priori $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ (sauf cas particulier).

Q: Déduire de $\hat{g}(\nu)$ les transformées de Fourier de ($A > 0$, $b \in \mathbb{R}$):

$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g_{A,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-b| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q: Déduire de $\hat{g}(\nu)$ les transformées de Fourier de ($A > 0$, $b \in \mathbb{R}$):

$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g_{A,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-b| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par un calcul identique à celui de $\hat{g}(\nu)$ (intégration de $x \mapsto e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}$ sur un intervalle):

$$\widehat{g_A}(\nu) = A\frac{\sin \pi\nu A}{\pi\nu A}$$

$$\widehat{g_{A,b}}(\nu) = Ae^{-\mathrm{i}2\pi\nu b}\frac{\sin \pi\nu A}{\pi\nu A}$$

Q: Déduire de $\hat{g}(\nu)$ les transformées de Fourier de ($A > 0$, $b \in \mathbb{R}$):

$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g_{A,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-b| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par un calcul identique à celui de $\hat{g}(\nu)$ (intégration de $x \mapsto e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}$ sur un intervalle):

$$\widehat{g_A}(\nu) = A\frac{\sin \pi\nu A}{\pi\nu A}$$
$$\widehat{g_{A,b}}(\nu) = Ae^{-\mathrm{i}2\pi\nu b}\frac{\sin \pi\nu A}{\pi\nu A}$$

S'obtient plus simplement par les propriétés de dilatation/translation en écrivant:

$$g_A(x) = g(x/A) \qquad g_{A,b}(x) = g_A(x-b)$$

Dilatation, translation

Property

Si $f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}(\nu)$ *alors:*

dilatation	$f(\lambda x) \xrightarrow{\text{TF}} \dfrac{1}{\lvert\lambda\rvert}\hat{f}\left(\dfrac{\nu}{\lambda}\right)$
translation	$f(x-b) \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\mathrm{i}2\pi\nu b}\hat{f}(\nu)$
modulation	$e^{\mathrm{i}2\pi a x} f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}(\nu - a)$

- A utiliser pour systématiser et faciliter certains calculs!

Q: Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

<u>**Q**</u>: Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx = \int_{-1}^{0} \cdots + \int_{0}^{1} \ldots \\
&= \ldots \text{intégration par parties} \ldots \text{calcul à faire} \ldots \\
&= \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2
\end{aligned}$$

<u>Q</u>: Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-i2\pi\nu x}\, dx = \int_{-1}^{0} \cdots + \int_{0}^{1} \ldots \\ &= \ldots \text{intégration par parties} \ldots \text{calcul à faire} \ldots \\ &= \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 \end{aligned}$$

- En observant $h = g \star g$, résultat immédiat:

$$\hat{h}(\nu) = \hat{g}(\nu)^2$$

Q: Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx = \int_{-1}^{0} \cdots + \int_{0}^{1} \ldots \\ &= \ldots \text{intégration par parties} \ldots \text{calcul à faire} \ldots \\ &= \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2 \end{aligned}$$

- En observant $h = g \star g$, résultat immédiat:

$$\hat{h}(\nu) = \hat{g}(\nu)^2$$

- **Rq**: $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ (alors que $\hat{g} \notin L^1(\mathbb{R})$).

Convolution

Définition (produit de convolution de f et g)

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\,du$$
$$= (g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)\,du$$

Convolution

Définition (produit de convolution de f et g)

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\,du$$
$$= (g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)\,du$$

Rq: Notation abusive possible: $(f \star g)(x) = f(x) \star g(x)$

Convolution

Définition (produit de convolution de f et g)

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\,du$$
$$= (g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)\,du$$

Rq: Notation abusive possible: $(f \star g)(x) = f(x) \star g(x)$

Property

$$f \star g \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}\hat{g}$$

Convolution

Définition (produit de convolution de f et g)

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\,du$$
$$= (g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)\,du$$

Rq: Notation abusive possible: $(f \star g)(x) = f(x) \star g(x)$

Property

$$f \star g \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}\hat{g}$$

Rq: Validité des équations ci-dessus sous réserve d'existence.
Quelques conditions suffisantes:

- $f, g \in L^1(\mathbb{R})$
- $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$: alors $\mathcal{F}[f.g] \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f} \star \hat{g}$
- autres: $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ / ...

Q: Calculer $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right]$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx$.

<u>Q</u>: Calculer $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right]$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx$.

- D'après question précédente:

$$h(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{h}(\nu) = \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right)^2$$

<u>Q</u>: Calculer $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right]$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx$.

- D'après question précédente:

$$h(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{h}(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$$

- Prop: (TF inverse) $h \in L^1, \hat{h} \in L^1$ et h continue donnent:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\nu) e^{+\mathrm{i}2\pi\nu x} \, d\nu$$

Q: Calculer $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right]$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\, dx$.

- D'après question précédente:

$$h(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{h}(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$$

- Prop: (TF inverse) $h \in L^1, \hat{h} \in L^1$ et h continue donnent:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\nu) e^{+\mathrm{i}2\pi\nu x}\, d\nu$$

- Après reécriture: $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right](\nu) = h(\nu)$. (au sens $L^1(\mathbb{R})$)

Q: Calculer $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right]$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx$.

- D'après question précédente:

$$h(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{h}(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$$

- Prop: (TF inverse) $h \in L^1, \hat{h} \in L^1$ et h continue donnent:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\nu) e^{+\mathrm{i}2\pi\nu x} \, d\nu$$

- Après reécriture: $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right](\nu) = h(\nu).$ (au sens $L^1(\mathbb{R})$)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx = h(0) = 1.$

Q: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^3 \, dx.$

Q: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^3 \, dx.$

En considérant $g \star g \star g = g \star h$ et propriété de la convolution:

$$(g \star h)(x) \xrightarrow{\text{TF}} \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right)^3$$

Q: Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^3 \, dx$.

En considérant $g \star g \star g = g \star h$ et propriété de la convolution:

$$(g \star h)(x) \xrightarrow{\text{TF}} \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right)^3$$

Par suite:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right)^3 \, d\nu &= (h \star g)(0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(0 - x) \, dx \end{aligned}$$

Q: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^3 \, dx$.

En considérant $g \star g \star g = g \star h$ et propriété de la convolution:

$$(g \star h)(x) \xrightarrow{\text{TF}} \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right)^3$$

Par suite:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right)^3 \, d\nu &= (h \star g)(0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(0-x) \, dx\end{aligned}$$

et par calcul d'aire:

$$= 3/4$$

Q: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x}\, dx$ (préciser la définition).

Q: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x}\, dx$ (préciser la définition).

- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R})$ (càd non intégrable)

<u>Q</u>: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x}\, dx$ (préciser la définition).

- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R})$ (càd non intégrable)

Property (extension formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$)

Si $g \in L^1$, g classe C^1 sauf nombre fini de discontinuités, $g' \in L^1$:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \hat{g}(\nu) e^{+\mathrm{i}2\pi\nu x}\, d\nu = \frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$$

Q: Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x}\, dx$ (préciser la définition).

- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R})$ (càd non intégrable)

Property (extension formule d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$)

Si $g \in L^1$, g classe C^1 sauf nombre fini de discontinuités, $g' \in L^1$:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \hat{g}(\nu) e^{+i2\pi\nu x}\, d\nu = \frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$$

- Avec $\int_{-\infty}^{\infty}$ définie comme la limite ci-dessus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\, d\nu = g(0) = 1$$

Q: Calculer $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$ et retrouver $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx$.

Q: Calculer $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$ et retrouver $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\,dx$.

- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R})$

Q: Calculer $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$ et retrouver $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx$.

- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R})$
- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \in L^2(\mathbb{R})$: transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ ou transformée Parseval-Plancherel

Q: Calculer $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$ et retrouver $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$.

- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R})$
- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \in L^2(\mathbb{R})$: transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ ou transformée Parseval-Plancherel
- D'après question précécente, pour presque tout ν:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin \pi x}{\pi x} e^{-i2\pi\nu x}\, dx = g(\nu) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(\nu)$$

d'où $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right] = g$.

<u>Q</u>: Calculer $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$ et retrouver $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx$.

- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \notin L^1(\mathbb{R})$
- $\frac{\sin \pi x}{\pi x} \in L^2(\mathbb{R})$: transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ ou transformée Parseval-Plancherel
- D'après question précécente, pour presque tout ν:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin \pi x}{\pi x} e^{-i2\pi\nu x} \, dx = g(\nu) = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(\nu)$$

  d'où $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right] = g$.
- Formule de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)^2 \, d\nu = 1\,.$$

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (1/2)

- Au départ: opérateur $\mathcal{F}$ défini pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (1/2)

- Au départ: opérateur $\mathcal{F}$ défini pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.
- Prolongation $\mathcal{F}$ pour toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$
  Argument: densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (1/2)

- Au départ: opérateur $\mathcal{F}$ défini pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.
- Prolongation $\mathcal{F}$ pour toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$
  Argument: densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$
- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $f_n = f.\mathbb{1}_{[-n,n]}$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$:

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (1/2)

- Au départ: opérateur $\mathcal{F}$ défini pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.
- Prolongation $\mathcal{F}$ pour toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$
  Argument: densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$
- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $f_n = f.\mathbb{1}_{[-n,n]}$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$:
  - $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ et donc $\mathcal{F}f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{F}f$
    (au sens limites dans $L^2(\mathbb{R})$)

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (1/2)

- Au départ: opérateur $\mathcal{F}$ défini pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.
- Prolongation $\mathcal{F}$ pour toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$
  Argument: densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$
- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $f_n = f.\mathbb{1}_{[-n,n]}$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$:
  - $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ et donc $\mathcal{F}f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{F}f$
    (au sens limites dans $L^2(\mathbb{R})$)
  - Donne en pratique:

$$\hat{f}(\nu) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x} f(x)\, dx$$

(égalité au sens $L^2(\mathbb{R})$ mais aussi p.p. par le th. Carleson)

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (1/2)

- Au départ: opérateur $\mathcal{F}$ défini pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{R})$.
- Prolongation $\mathcal{F}$ pour toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$
  Argument: densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$
- Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ alors $f_n = f.\mathbb{1}_{[-n,n]}$ est dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$:
  - $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ et donc $\mathcal{F}f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{F}f$
    (au sens limites dans $L^2(\mathbb{R})$)
  - Donne en pratique:

$$\hat{f}(\nu) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} e^{-i2\pi\nu x} f(x)\, dx$$

(égalité au sens $L^2(\mathbb{R})$ mais aussi p.p. par le th. Carleson)

- $\mathcal{F}$ défini sur $L^1(\mathbb{R})$ et sur $L^2(\mathbb{R})$ coincident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (2/2)

Théorème (Parseval-Plancherel)

Transformation de Fourier $\mathcal{F}$ *(et* $\overline{\mathcal{F}}$*) se prolonge en opérateur linéaire* $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. *Pour* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, *avec* $\hat{f} = \mathcal{F}f$, $\hat{g} = \mathcal{F}g$:

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (2/2)

Théorème (Parseval-Plancherel)

Transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ (et $\overline{\mathfrak{F}}$) se prolonge en opérateur linéaire $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, avec $\hat{f} = \mathfrak{F}f$, $\hat{g} = \mathfrak{F}g$:

- $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}f = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f = f$ *(presque partout)*

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (2/2)

Théorème (Parseval-Plancherel)

Transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ *(et* $\overline{\mathfrak{F}}$*) se prolonge en opérateur linéaire* $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. *Pour* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, *avec* $\hat{f} = \mathfrak{F}f$, $\hat{g} = \mathfrak{F}g$*:*

- $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}f = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f = f$ *(presque partout)*
- *relation de* ***Parseval****:* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\,dx$

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ (2/2)

Théorème (Parseval-Plancherel)

Transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ (et $\overline{\mathfrak{F}}$) se prolonge en opérateur linéaire $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, avec $\hat{f} = \mathfrak{F}f$, $\hat{g} = \mathfrak{F}g$:

- $\mathfrak{F}\overline{\mathfrak{F}}f = \overline{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f = f$ *(presque partout)*
- *relation de* ***Parseval***: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\,dx$
- $\mathfrak{F}$ *est une isométrie:* $\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$

Q: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^4 \, dx$.

Q: Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^4 \, dx$.

En appliquant la relation de Parseval ou les propriétés de la convolution:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^4 \, dx = 2/3$$

Enoncé: On note $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique d'un ensemble A et $\mathcal{F}$ l'opérateur de Fourier.
Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{-ax}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et pour } k \in \mathbb{N}: \quad \phi_k(x) = \frac{x^k}{k!} f_a(x)\,.$$

1. Calculer $\mathcal{F}[f_a]$ et en déduire $\mathcal{F}[\phi_k]$.
2. Soit g_a définie pour tout x par $g_a(x) = f_a(x) + f_a(-x)$. Déterminer $\mathcal{F}[g_a]$ et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\, dx \quad (\omega \in \mathbb{R} \text{ fixé}).$$

3. Soit h_a définie pour tout x par $h_a(x) = f_a(x) - f_a(-x)$. Déterminer $\mathcal{F}[h_a]$.

Enoncé: Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

1. Etablir une équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
2. Intégrer cette équation différentielle et en déduire que $\hat{f}(\nu) = Ke^{-\pi\nu^2}$, où K est une constante.
3. Trouver la constante K en redémontrant au passage que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$.
4. Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$, où $a, b > 0$.

<u>**Q**</u>: Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\hat{f} = \mathcal{F} f$.
Equation différentielle vérifiée par $\hat{f}$?

<u>Q</u>: Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\hat{f} = \mathcal{F}f$.
Equation différentielle vérifiée par $\hat{f}$?

Dériver au choix f ou $\hat{f}$ et se rappeler les propriétés de dérivation de la transformée de Fourier.

Transformée de Fourier et dérivation

Property

Si $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$, *alors sous réserve d'existence:*

$$f'(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) \qquad f^{(n)}(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)^n\hat{f}(\nu)$$

$$(-\mathrm{i}2\pi x)f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}'(\nu) \qquad (-\mathrm{i}2\pi x)^n f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}^{(n)}(\nu)$$

Transformée de Fourier et dérivation

Property

Si $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$, *alors sous réserve d'existence:*

$$f'(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) \qquad f^{(n)}(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)^n\hat{f}(\nu)$$

$$(-\mathrm{i}2\pi x)f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}'(\nu) \qquad (-\mathrm{i}2\pi x)^n f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}^{(n)}(\nu)$$

- formule identique en physique: $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow \mathrm{i}2\pi\nu$

Transformée de Fourier et dérivation

Property

Si $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$, *alors sous réserve d'existence:*

$$f'(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) \qquad f^{(n)}(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)^n\hat{f}(\nu)$$

$$(-\mathrm{i}2\pi x)f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}'(\nu) \qquad (-\mathrm{i}2\pi x)^n f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}^{(n)}(\nu)$$

- formule identique en physique: $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow \mathrm{i}2\pi\nu$
- régularité/dérivabilité $\xleftrightarrow{\text{TF}}$ décroissance à $\pm\infty$

Transformée de Fourier et dérivation

Property

Si $f \xrightarrow{\mathrm{TF}} \hat{f}$, *alors sous réserve d'existence:*

$$f'(x) \xrightarrow{\mathrm{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) \qquad f^{(n)}(x) \xrightarrow{\mathrm{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)^n\hat{f}(\nu)$$

$$(-\mathrm{i}2\pi x)f(x) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \hat{f}'(\nu) \qquad (-\mathrm{i}2\pi x)^n f(x) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \hat{f}^{(n)}(\nu)$$

- formule identique en physique: $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow \mathrm{i}2\pi\nu$
- régularité/dérivabilité $\overset{\mathrm{TF}}{\longleftrightarrow}$ décroissance à $\pm\infty$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ = fonctions infiniment dérivables et décroissance rapide (ainsi que leurs dérivées)

Transformée de Fourier et dérivation

Property

Si $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$, *alors sous réserve d'existence:*

$$f'(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) \qquad f^{(n)}(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)^n\hat{f}(\nu)$$

$$(-\mathrm{i}2\pi x)f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}'(\nu) \qquad (-\mathrm{i}2\pi x)^n f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}^{(n)}(\nu)$$

- formule identique en physique: $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow \mathrm{i}2\pi\nu$
- régularité/dérivabilité $\xleftrightarrow{\text{TF}}$ décroissance à $\pm\infty$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ = fonctions infiniment dérivables et décroissance rapide (ainsi que leurs dérivées)
  - espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ stable par transformée de Fourier

Transformée de Fourier et dérivation

Property

Si $f \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}$, *alors sous réserve d'existence:*

$$f'(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) \qquad f^{(n)}(x) \xrightarrow{\text{TF}} (\mathrm{i}2\pi\nu)^n \hat{f}(\nu)$$

$$(-\mathrm{i}2\pi x) f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}'(\nu) \qquad (-\mathrm{i}2\pi x)^n f(x) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{f}^{(n)}(\nu)$$

- formule identique en physique: $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow \mathrm{i}2\pi\nu$
- régularité/dérivabilité $\xleftrightarrow{\text{TF}}$ décroissance à $\pm\infty$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ = fonctions infiniment dérivables et décroissance rapide (ainsi que leurs dérivées)
  - espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ stable par transformée de Fourier
  - pour f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, propriétés ci-dessus vraies sans restriction

<u>Q</u>: Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\hat{f} = \mathcal{F}f$.

Q: Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\hat{f} = \mathcal{F} f$.

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et les formules de dérivation s'appliquent.

<u>Q</u>: Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\hat{f} = \mathcal{F} f$.

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et les formules de dérivation s'appliquent.

- En dérivant f:

$$f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = \frac{1}{\mathrm{i}}(-\mathrm{i}2\pi x) f(x) \qquad \text{et donc:}$$

$$(\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) = \frac{1}{\mathrm{i}}\hat{f}'(\nu) \qquad \text{d'où:} \quad \hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu \hat{f}(\nu)\,.$$

Q: Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ et $\hat{f} = \mathcal{F} f$.

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et les formules de dérivation s'appliquent.

- En dérivant f:

$$f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = \frac{1}{\mathrm{i}}(-\mathrm{i}2\pi x) f(x) \qquad \text{et donc:}$$

$$(\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) = \frac{1}{\mathrm{i}}\hat{f}'(\nu) \qquad \text{d'où:} \quad \hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu)\,.$$

- En dérivant $\hat{f}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\nu) &= \mathcal{F}[(-\mathrm{i}2\pi x) f(x)](\nu) = \mathrm{i}\mathcal{F}\left[f'(x)\right] = \mathrm{i}(\mathrm{i}2\pi\nu)\hat{f}(\nu) \\ &= -2\pi\nu\hat{f}(\nu)\end{aligned}$$

Q: Intégrer l'équation différentielle $\hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu)$ et en déduire $\hat{f}(\nu)$.

Q: Intégrer l'équation différentielle $\hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu)$ et en déduire $\hat{f}(\nu)$.

- Equation différentielle linéaire du premier ordre et homogène (sans second membre), voir en bas:

$$\hat{f}(\nu) = Ke^{-\pi\nu^2}, \quad K \in \mathbb{C}$$

$\hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu) \Leftrightarrow \left(e^{\pi\nu^2}\hat{f}(\nu)\right)' = 0$ ou en écrivant: $\frac{\hat{f}'(\nu)}{\hat{f}(\nu)} = -2\pi\nu$

<u>**Q**</u>: Intégrer l'équation différentielle $\hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu)$ et en déduire $\hat{f}(\nu)$.

- Equation différentielle linéaire du premier ordre et homogène (sans second membre), voir en bas:

$$\hat{f}(\nu) = Ke^{-\pi\nu^2}, \quad K \in \mathbb{C}$$

- $K = \hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\, dx > 0$

$\hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu) \Leftrightarrow \left(e^{\pi\nu^2}\hat{f}(\nu)\right)' = 0$ ou en écrivant: $\frac{\hat{f}'(\nu)}{\hat{f}(\nu)} = -2\pi\nu$

Q: Intégrer l'équation différentielle $\hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu)$ et en déduire $\hat{f}(\nu)$.

- Equation différentielle linéaire du premier ordre et homogène (sans second membre), voir en bas:

$$\hat{f}(\nu) = Ke^{-\pi\nu^2}, \quad K \in \mathbb{C}$$

- $K = \hat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\, dx > 0$
- Comme $\hat{f} = K.f$ et $\mathfrak{F}\mathfrak{F}[f](x) = f(-x)$ et f paire:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[\hat{f}] = \mathfrak{F}[K.f] = K\hat{f} = K^2.f = f$$

Finalement, $K = 1$ et donc

$$e^{-\pi x^2} \xrightarrow{\text{TF}} e^{-\pi\nu^2}$$

$\hat{f}'(\nu) = -2\pi\nu\hat{f}(\nu) \Leftrightarrow \left(e^{\pi\nu^2}\hat{f}(\nu)\right)' = 0$ ou en écrivant: $\frac{\hat{f}'(\nu)}{\hat{f}(\nu)} = -2\pi\nu$

Q: Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$ fixés).

<u>Q</u>: Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$ fixés).

- Calcul pas évident... passer par la transformée de Fourier?

Q: Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$ fixés).

- Calcul pas évident... passer par la transformée de Fourier?
- Propriété de la convolution/transf. Fourier:

$$e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} \xrightarrow{\text{TF}} \mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$$

Q: Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$ fixés).

- Calcul pas évident... passer par la transformée de Fourier?
- Propriété de la convolution/transf. Fourier:

$$e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} \xrightarrow{\mathrm{TF}} \mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$$

- Ci-dessus:

Q: Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$ fixés).

- Calcul pas évident... passer par la transformée de Fourier?
- Propriété de la convolution/transf. Fourier:

$$e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} \xrightarrow{\text{TF}} \mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$$

- Ci-dessus:
  - $\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)$ et $\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$ sont des gaussiennes

Q: Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$ fixés).

- Calcul pas évident. . . passer par la transformée de Fourier?
- Propriété de la convolution/transf. Fourier:

$$e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} \xrightarrow{\text{TF}} \mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$$

- Ci-dessus:
  - $\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)$ et $\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$ sont des gaussiennes
  - le produit des deux est une gaussienne!

<u>Q</u>: Calculer le produit de convolution $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ (où $a > 0$ et $b > 0$ fixés).

- Calcul pas évident... passer par la transformée de Fourier?
- Propriété de la convolution/transf. Fourier:

$$e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} \xrightarrow{\text{TF}} \mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$$

- Ci-dessus:
  - $\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\nu)$ et $\mathcal{F}[e^{-bx^2}](\nu)$ sont des gaussiennes
  - le produit des deux est une gaussienne!
  - $e^{-ax^2} \star e^{-bx^2}$ est donc une gaussienne

Reste à trouver l'expression exacte et s'interroger: ne serait-ce pas un résultat connu et déjà vu ailleurs?

- Pour $a > 0$ quelconque[1]:

$$e^{-ax^2} = e^{-\pi(\sqrt{\frac{a}{\pi}}x)^2} \xrightarrow{\text{TF}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\nu)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

[1] Rappel: π n'est pas quelconque!

- Pour $a > 0$ quelconque[1]:

$$e^{-ax^2} = e^{-\pi(\sqrt{\frac{a}{\pi}}x)^2} \xrightarrow{\text{TF}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\nu)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

- En posant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =: \frac{1}{c}$ càd $c := \frac{ab}{a+b}$:

$$e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} \xrightarrow{\text{TF}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{\frac{-\pi^2\nu^2}{c}}$$

[1] Rappel: π n'est pas quelconque!

- Pour $a > 0$ quelconque[1]:

$$e^{-ax^2} = e^{-\pi(\sqrt{\frac{a}{\pi}}x)^2} \xrightarrow{\text{TF}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\nu)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}}$$

- En posant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =: \frac{1}{c}$ càd $c := \frac{ab}{a+b}$:

$$e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} \xrightarrow{\text{TF}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{\frac{-\pi^2\nu^2}{c}}$$

- Après transformée Fourier inverse:

$$\begin{aligned} e^{-ax^2} \star e^{-bx^2} &= \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-cx^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\frac{ab}{a+b}x^2} \end{aligned}$$

[1] Rappel: π n'est pas quelconque!

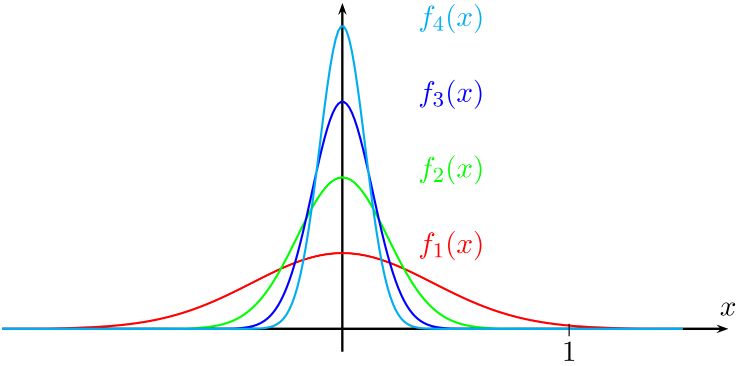
Section 5

Distributions

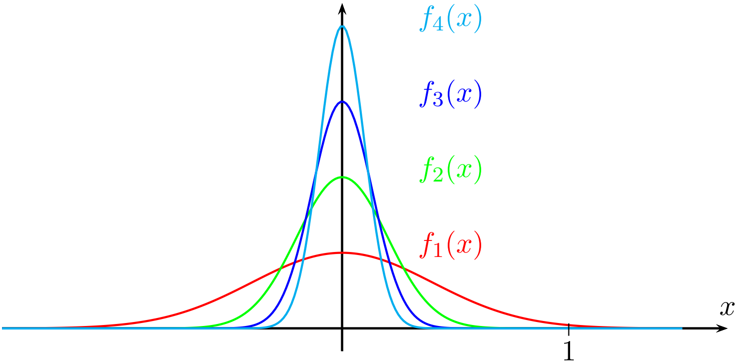
Enoncé: Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de la suite de fonctions $f_n(x) = ne^{-\pi n^2 x^2}$, d'abord au sens des fonctions usuelles, puis au sens des distributions.

Q: Limite quand $n \to +\infty$ de la suite de fonctions $f_n(x) = ne^{-\pi n^2 x^2}$.

Q: Limite quand $n \to +\infty$ de la suite de fonctions $f_n(x) = ne^{-\pi n^2 x^2}$.



Q: Limite quand $n \to +\infty$ de la suite de fonctions $f_n(x) = ne^{-\pi n^2 x^2}$.



- convergence simple des fonctions:

$$\text{pour } x \neq 0,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

- dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, distributions régulières associées $T_{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ??$

- dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, distributions régulières associées $T_{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ??$

Définition (limite d'une suite de distributions)

On dit que $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T$ *pour des distributions de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *lorsque:*

$$\text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}): \quad \langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} n e^{-\pi n^2 x^2} \varphi(x) \, dx$$

$$\begin{aligned}\langle T_{f_n}, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} ne^{-\pi n^2x^2}\varphi(x)\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\varphi(\frac{t}{n})\ dt\end{aligned}$$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} n e^{-\pi n^2 x^2} \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \varphi(\frac{t}{n})\, dt$$

en utilisant th. convergence dominée / majoration $|\langle T_{f_n}, \varphi \rangle - \varphi(0)|$:

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(0)$$

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} n e^{-\pi n^2 x^2} \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \varphi(\frac{t}{n})\, dt$$

en utilisant th. convergence dominée / majoration $|\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \varphi(0)|$:

$$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0)$$

et donc: $\quad T_{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta \quad$ (distribution de Dirac)

Enoncé:

1. Soit f une fonction de classe C^1. Montrer que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle$ et justifier que l'on définisse la dérivée T' d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle.$$

2.
   1. On note Y l'échelon unité ($Y(x) = 0$ si $x < 0$ et 1 si $x > 0$). Calculer Y'.
   2. Soit f une fonction, dérivable pour $x < 0$ et pour $x > 0$ et qui admette une limite à gauche et à droite en 0, notées $f(0^-)$ et $f(0^+)$ respectivement. On pose $\sigma_0 = f(0^+) - f(0^-)$. Montrer que l'on a:

   $$f' = \{f'\} + \sigma_0\delta$$

   où f' est la dérivée au sens des distributions et $\{f'\}$ est la fonction égale à la dérivée usuelle pour $x > 0$ et $x < 0$.
   3. Généraliser le résultat pour une fonction f dérivable par morceaux et qui présente des points de discontinuité $a_k, k = 1 \dots n$ (les limites à droite et à gauche existent).
3.
   1. Soit α une fontion infiniment dérivable et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Justifier que la définition du produit αT par la formule:

   $$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \alpha T, \varphi\rangle = \langle T, \alpha\varphi\rangle$$

   a un sens. Montrer que la règle de dérivation usuelle se généralise alors.
   2. Calculer les dérivées suivantes: $\Pi(x)$ (fonction porte), $\Lambda(x) = (\Pi \star \Pi)(x)$, $\mathrm{signe}(x) = \frac{|x[}{x}$, $\Pi(x)\cos(\pi x)$, $\Pi(x)\sin(\pi x)$.
4. Calculer au sens des distributions:

$$T = \left\{\frac{d}{dx} - \lambda\right\} Y(x)e^{\lambda x}; \qquad U = \left\{\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right\} Y(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega}; \qquad V = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\{Y(x)x^{n-1}\}.$$

5. Quelle est la dérivée δ' de la distribution de Dirac? Connaissez-vous une distribution "physique" qui corresponde à cette distribution mathématique?

<u>Q</u>: Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et T_f sa distribution régulière associée. Montrer que $\langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Q: Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et T_f sa distribution régulière associée. Montrer que $\langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle T_{f'}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'\varphi \\
&= \underbrace{[f\varphi]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi' \quad \text{(intégration par parties)} \\
&= -\langle T_f, \varphi' \rangle
\end{aligned}$$

Q: Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et T_f sa distribution régulière associée. Montrer que $\langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \langle T_{f'}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'\varphi \\ &= \underbrace{[f\varphi]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi' \qquad \text{(intégration par parties)} \\ &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \end{aligned}$$

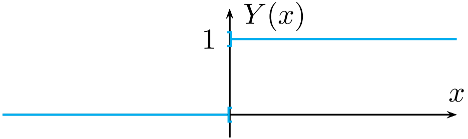
Définition (dérivée d'une distribution)

Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit sa dérivée T' par:

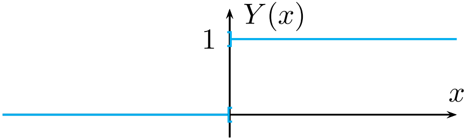
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$

- ainsi, on a: $T_f' = T_{f'}$.
- on montre que «tout se passe bien» (la définition a un sens, toute distribution est dérivable, . . .).

Q: Dériver l'échelon unité.



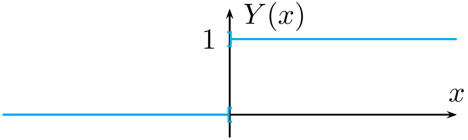
Q: Dériver l'échelon unité.



- Dérivation au sens fonction:

$$Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ \text{non défini} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Q: Dériver l'échelon unité.



- Dérivation au sens fonction:

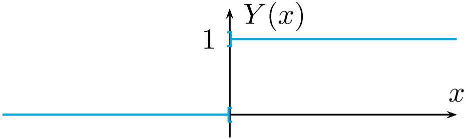
$$Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ \text{non défini} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Dérivation au sens distribution:

$$\langle T_Y', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} Y(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0)$$

Par conséquent: $T_Y' = \delta$

Q: Dériver l'échelon unité.



- Dérivation au sens fonction:

$$Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ \text{non défini} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

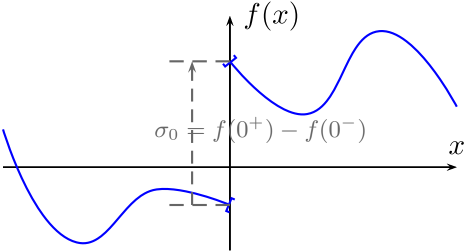
- Dérivation au sens distribution:

$$\langle T'_Y, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} Y(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0)$$

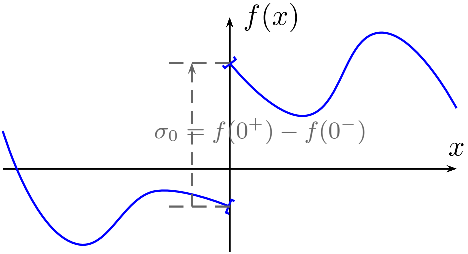
Par conséquent: $T'_Y = \delta$

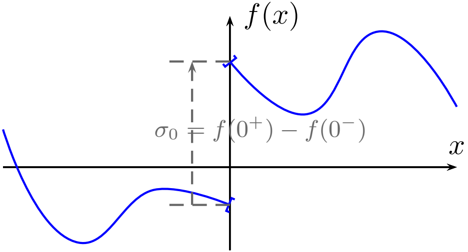
- **Rq**: $T_{Y'} = 0$ puisque Y' est nulle presque partout (et donc $T_{Y'} \neq T'_Y$).
- **Rq**: Par abus $Y' = \delta$ s'il est clair que Y considéré comme distribution.

Q: f fonction, dérivable sauf en 0, limites à gauche et à droite existent. Dérivée f' définie presque partout (pas en 0).

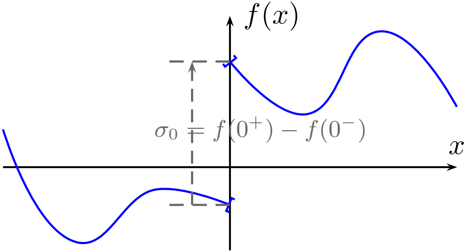


Montrer que: $T_f' = T_{f'} + \sigma_0\delta$

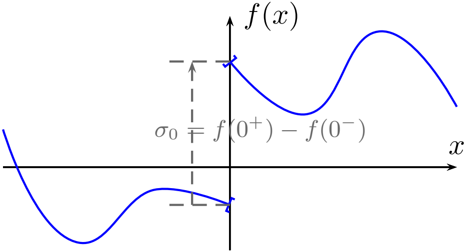

$f(x)$
$\sigma_0 = f(0^+) - f(0^-)$
x



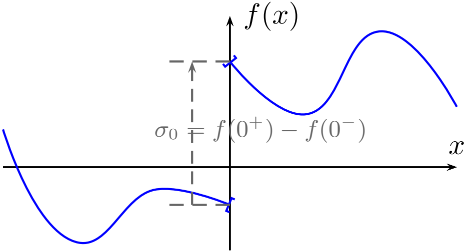
$$\langle T'_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$



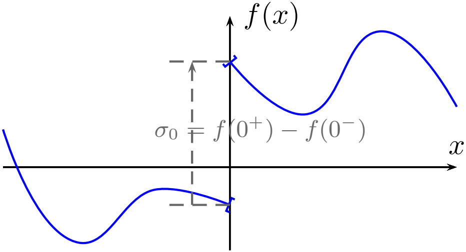
$$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f \varphi'$$



$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{-\infty}^{0} f\varphi' - \int_{0}^{+\infty} f\varphi'$$



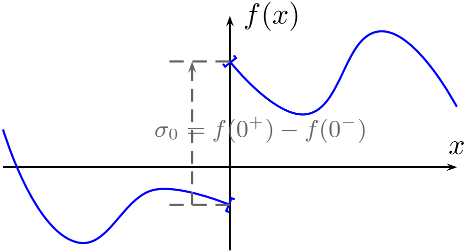
$$\langle T'_f, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{-\infty}^{0} f\varphi' - \int_{0}^{+\infty} f\varphi'$$
$$= -\left[f\varphi\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f'\varphi - \left[f\varphi\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} f'\varphi$$



$$\langle T_f', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{-\infty}^{0} f\varphi' - \int_{0}^{+\infty} f\varphi'$$

$$= -\left[f\varphi\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f'\varphi - \left[f\varphi\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} f'\varphi$$

$$= f(0^+)\varphi(0^+) - f(0^-)\varphi(0^-) + \int_{\mathbb{R}} f'\varphi$$



$$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{-\infty}^{0} f\varphi' - \int_{0}^{+\infty} f\varphi'$$

$$= -[f\varphi]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f'\varphi - [f\varphi]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} f'\varphi$$

$$= f(0^+)\varphi(0^+) - f(0^-)\varphi(0^-) + \int_{\mathbb{R}} f'\varphi = \langle T_{f'} + \sigma_0\delta, \varphi \rangle$$

et donc: $T_f' = T_{f'} + \sigma_0\delta$

Q: Généraliser le résultat pour une fonction f dérivable par morceaux et qui présente des points de discontinuité $a_k, k = 1 \ldots n$ (les limites à droite et à gauche existent).

Q: Généraliser le résultat pour une fonction f dérivable par morceaux et qui présente des points de discontinuité $a_k, k = 1 \dots n$ (les limites à droite et à gauche existent).

- Voir le polycopié et le cours!

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \delta_{a_k}$$

où pour tout k, $\sigma_k = f(a_k^+) - f(a_k^-)$ et δ_{a_k} est la distribution de Dirac centrée en a_k.

Q: Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Justifier qu'on définisse le produit αT par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$$

<u>Q</u>: Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Justifier qu'on définisse le produit αT par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$$

- Pour f localement sommable, généralise le produit de fonctions:

$$\alpha T_f = T_{\alpha f}$$

Q: Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Justifier qu'on définisse le produit αT par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$$

- Pour f localement sommable, généralise le produit de fonctions:

$$\alpha T_f = T_{\alpha f}$$

- Le membre de droite est bien défini:
  - $\alpha\varphi$ est C^∞ (produit de fonctions C^∞)
  - $\alpha\varphi$ support compact (car φ a un support compact).

<u>**Q**</u>: Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Justifier qu'on définisse le produit αT par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$$

- Pour f localement sommable, généralise le produit de fonctions:

$$\alpha T_f = T_{\alpha f}$$

- Le membre de droite est bien défini:
  - $\alpha\varphi$ est C^∞ (produit de fonctions C^∞)
  - $\alpha\varphi$ support compact (car φ a un support compact).
- On vérifie que αT est une forme linéaire continue.

<u>**Q**</u>: Soit $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Justifier qu'on définisse le produit αT par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$$

- Pour f localement sommable, généralise le produit de fonctions:

$$\alpha T_f = T_{\alpha f}$$

- Le membre de droite est bien défini:
  - $\alpha\varphi$ est C^∞ (produit de fonctions C^∞)
  - $\alpha\varphi$ support compact (car φ a un support compact).
- On vérifie que αT est une forme linéaire continue.
- <u>Attention:</u> le produit de deux distributions quelconques n'existe pas toujours!

Q: Montrer que pour la distribution produit αT, la règle de dérivation usuelle s'applique.

Q: Montrer que pour la distribution produit αT, la règle de dérivation usuelle s'applique.

- Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle (\alpha T)', \varphi \rangle = -\langle \alpha T, \varphi' \rangle \qquad \text{(définition dérivation)}$$

Q: Montrer que pour la distribution produit αT, la règle de dérivation usuelle s'applique.

- Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T)', \varphi \rangle &= -\langle \alpha T, \varphi' \rangle && \text{(définition dérivation)} \\ &= -\langle T, \alpha \varphi' \rangle && \text{(définition produit)} \end{aligned}$$

Q: Montrer que pour la distribution produit αT, la règle de dérivation usuelle s'applique.

- Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha T)', \varphi \rangle &= -\langle \alpha T, \varphi' \rangle && \text{(définition dérivation)} \\
&= -\langle T, \alpha \varphi' \rangle && \text{(définition produit)} \\
&= -\langle T, (\alpha \varphi)' - \alpha' \varphi \rangle && \text{(calcul de } (\alpha\varphi)'\text{)}
\end{aligned}$$

Q: Montrer que pour la distribution produit αT, la règle de dérivation usuelle s'applique.

- Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha T)', \varphi\rangle &= -\langle \alpha T, \varphi'\rangle && \text{(définition dérivation)}\\
&= -\langle T, \alpha\varphi'\rangle && \text{(définition produit)}\\
&= -\langle T, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi\rangle && \text{(calcul de } (\alpha\varphi)'\text{)}\\
&= -\langle T, (\alpha\varphi)'\rangle + \langle T, \alpha'\varphi\rangle && \text{(linéarité)}
\end{aligned}$$

Q: Montrer que pour la distribution produit αT, la règle de dérivation usuelle s'applique.

- Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha T)', \varphi \rangle &= -\langle \alpha T, \varphi' \rangle && \text{(définition dérivation)} \\
&= -\langle T, \alpha \varphi' \rangle && \text{(définition produit)} \\
&= -\langle T, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi \rangle && \text{(calcul de } (\alpha\varphi)'\text{)} \\
&= -\langle T, (\alpha\varphi)' \rangle + \langle T, \alpha'\varphi \rangle && \text{(linéarité)} \\
&= \langle T', \alpha\varphi \rangle + \langle \alpha' T, \varphi \rangle && \text{(définition dérivation/produit)}
\end{aligned}$$

Q: Montrer que pour la distribution produit αT, la règle de dérivation usuelle s'applique.

- Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
\langle (\alpha T)', \varphi \rangle &= -\langle \alpha T, \varphi' \rangle && \text{(définition dérivation)} \\
&= -\langle T, \alpha \varphi' \rangle && \text{(définition produit)} \\
&= -\langle T, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi \rangle && \text{(calcul de } (\alpha\varphi)'\text{)} \\
&= -\langle T, (\alpha\varphi)' \rangle + \langle T, \alpha'\varphi \rangle && \text{(linéarité)} \\
&= \langle T', \alpha\varphi \rangle + \langle \alpha' T, \varphi \rangle && \text{(définition dérivation/produit)} \\
&= \langle \alpha T', \varphi \rangle + \langle \alpha' T, \varphi \rangle && \text{(définition produit)}
\end{aligned}
$$

- Donc: $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$.

Q: Calculer les dérivées:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\mathrm{signe}(x) = \frac{|x|}{x} \qquad f(x) = \Pi(x)\cos(\pi x) \qquad g(x) = \Pi(x)\sin(\pi x)$$

Q: Calculer au sens des distributions:

$$T = \left\{\frac{d}{dx} - \lambda\right\} Y(x)e^{\lambda x} \qquad U = \left\{\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right\} Y(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega}x$$

$$V = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\{Y(x)x^{n-1}\}$$

Q: Quelle est la dérivée δ' de la distribution de Dirac? Connaissez-vous une distribution "physique" qui corresponde à cette distribution mathématique?

Enoncé: On note $\mathcal{F}$ l'opérateur de Fourier qui à une fonction f associe $\widehat{f} = \mathcal{F}f$ définie par $\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi\nu x}\,dx$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit φ une fonction test. On note $\widehat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$.
   1. Montrer que:
   $$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f\widehat{\varphi}$$
   2. La transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ d'une distribution T est définie par:
   $$\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$
   Commenter cette définition; préciser l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auquel appartient la fonction test et la raison pour laquelle on ne considère pas $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
   Qu'appelle-t-on une distribution tempérée?
2. On note δ la distribution de Dirac centrée en zéro et δ_a la distribution de Dirac centrée en a ($a \in \mathbb{R}$ fixé).
   1. Montrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a:
   $$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}1 = \delta. \tag{2}$$
   2. Montrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a:
   $$\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = e^{-i2\pi a\nu} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_x[e^{i2\pi ax}] = \delta_a. \tag{3}$$
3. On admet que les règles de la transformée de Fourier vis à vis du produit de convolution s'étendent dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soit f une fonction tempérée. En passant par la transformée de Fourier, montrer (où $\star$ est le produit de convolution):
$$f \star \delta = \delta \star f = f \tag{4}$$
$$f \star \delta_a = \delta_a \star f = f(. - a) \tag{5}$$
4. On s'autorise de noter les distributions comme des fontions, en particulier $\delta(. - a)$ pour δ_a.
   1. Récrire les équations (2),(3),(4) et (5) sous forme intégrale et préciser les règles de manipulation pratique souvent utilisées par le physicien pour le maniement de δ.
   2. Retrouver simplement les transformées de Fourier des distributions suivantes (a et x_0 sont fixés dans $\mathbb{R}$):
   $$T_1(x) = e^{i2\pi ax}, \qquad T_2(x) = \delta(x - x_0)$$
   $$T_3(x) = \cos(2\pi ax), \qquad T_4(x) = \sin(2\pi ax).$$
5. Que vaut le produit $f\delta_a$ si f est une fonction continue en a?

Notations: $\mathcal{F}f(\nu) = \widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\,dx$

Q: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (fonction test), montrer:

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f\widehat{\varphi}$$

Notations: $\mathcal{F}f(\nu) = \widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi\nu x}\,dx$

Q: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (fonction test), montrer:

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f\widehat{\varphi}$$

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\varphi(\nu)\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi\nu x}\,dx\right)\varphi(\nu)\,d\nu$$

Notations: $\mathcal{F}f(\nu) = \widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi\nu x}\, dx$

Q: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (fonction test), montrer:

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f\widehat{\varphi}$$

$$\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\varphi(\nu)\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i2\pi\nu x}\, dx\right)\varphi(\nu)\, d\nu$$

et puisque $(x,\nu) \mapsto f(x)\varphi(\nu)e^{-i2\pi\nu x}$ est intégrable:

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(\nu)e^{-i2\pi\nu x}\, dxd\nu$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\nu)e^{-i2\pi\nu x}\, d\nu\right)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{\varphi}(x)\, dx$$

- Pour une fonction, $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \widehat{\varphi}$,

- Pour une fonction, $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \widehat{\varphi}$,
- Ce qui précède peut aussi s'écrire $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi} \rangle$
- Il n'y a qu'à «faire pareil» pour les distributions. . .

- Pour une fonction, $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\widehat{\varphi}$,
- Ce qui précède peut aussi s'écrire $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi}\rangle$
- Il n'y a qu'à «faire pareil» pour les distributions. . .

Définition (transformée de Fourier)

La transformée de Fourier $\widehat{T}$ d'une distribution T, est définie par:

$$\langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle$$

- Pour une fonction, $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\widehat{\varphi}$,
- Ce qui précède peut aussi s'écrire $\langle T_{\widehat{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \widehat{\varphi}\rangle$
- Il n'y a qu'à «faire pareil» pour les distributions…

Définition (transformée de Fourier)

La transformée de Fourier $\widehat{T}$ d'une distribution ***tempérée*** *T, est définie par:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad \langle \widehat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle$$

- Qu'est-ce que l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? Pourquoi pas $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?
- Qu'appelle-t-on une distribution tempérée?

Rappels:

- la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est *jamais* dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ = ensemble des fonctions infiniment dérivables et à décroissance rapide (ainsi que les dérivées)
- la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
- Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a les égalités suivantes (vraies en tout point):

$$\forall \nu \in \mathbb{R} \qquad \widehat{\varphi}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\nu) e^{+\mathrm{i}2\pi\nu x}\, d\nu$$

Q: Montrer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (où δ/δ_a est le Dirac centré en zéro/en a):

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad\qquad \mathcal{F}1 = \delta$$

$$\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = e^{-\mathrm{i}2\pi a\nu} \qquad\qquad \mathcal{F}_x[e^{\mathrm{i}2\pi ax}] = \delta_a$$

Q: Montrer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (où δ/δ_a est le Dirac centré en zéro/en a):

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad \mathcal{F}1 = \delta$$

$$\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = e^{-\mathrm{i}2\pi a\nu} \qquad \mathcal{F}_x[e^{\mathrm{i}2\pi ax}] = \delta_a$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

<u>Q</u>: Montrer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (où δ/δ_a est le Dirac centré en zéro/en a):

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad \mathcal{F}1 = \delta$$

$$\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = e^{-\mathrm{i}2\pi a\nu} \qquad \mathcal{F}_x[e^{\mathrm{i}2\pi ax}] = \delta_a$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi\rangle$$

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi\rangle = \langle 1, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\nu)\, d\nu = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

Q: Montrer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (où δ/δ_a est le Dirac centré en zéro/en a):

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad \mathcal{F}1 = \delta$$

$$\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = e^{-i2\pi a\nu} \qquad \mathcal{F}_x[e^{i2\pi ax}] = \delta_a$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\nu)\, d\nu = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

$$\langle \mathcal{F}[\delta_a], \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i2\pi ax}\, dx = \langle e^{-i2\pi ax}, \varphi(x) \rangle$$

Q: Montrer dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (où δ/δ_a est le Dirac centré en zéro/en a):

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad\qquad \mathcal{F}1 = \delta$$

$$\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = e^{-i2\pi a\nu} \qquad\qquad \mathcal{F}_x[e^{i2\pi ax}] = \delta_a$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi\rangle$$

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi\rangle = \langle 1, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\nu)\, d\nu = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

$$\langle \mathcal{F}[\delta_a], \varphi\rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i2\pi ax}\, dx = \langle e^{-i2\pi ax}, \varphi(x)\rangle$$

$$\langle \mathcal{F}_x[e^{i2\pi ax}], \varphi\rangle = \langle e^{i2\pi ax}, \widehat{\varphi}(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x) e^{i2\pi ax}\, dx = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi\rangle$$

Rq: propriétés de translation/modulation demeurent

On admet:

- on peut définir un produit de **convolution** pour les distributions (Attention: n'existe pas toujours!)
- la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit ordinaire des transformées (sous réserve d'existence)
- Pour toute fonction/distribution tempérée f, on a:

$$f \star \delta = \delta \star f = f$$
$$f \star \delta_a = \delta_a \star f = f(. - a)$$

Q: Si l'on prend la transformée de Fourier des expressions précédentes, vérifier que tout est cohérent...

Q: On s'autorise de noter les distributions comme des fontions, en particulier $\delta(. - a)$ pour δ_a.

- Récrire les transformées de Fourier et les convolutions avec des Dirac sous forme d'intégrales (même si les intégrales n'ont pas de sens pour la théorie de l'intégration!).

Q: On s'autorise de noter les distributions comme des fontions, en particulier $\delta(. - a)$ pour δ_a.

- Récrire les transformées de Fourier et les convolutions avec des Dirac sous forme d'intégrales (même si les intégrales n'ont pas de sens pour la théorie de l'intégration!).

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad \int_{\mathbb{R}} \delta(x) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx = 1$$

$$\mathcal{F}[\delta_a](\nu) = e^{-\mathrm{i}2\pi a\nu} \qquad \int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\, dx = e^{-\mathrm{i}2\pi\nu a}$$

Q: On s'autorise de noter les distributions comme des fontions, en particulier $\delta(. - a)$ pour δ_a.

- Récrire les transformées de Fourier et les convolutions avec des Dirac sous forme d'intégrales (même si les intégrales n'ont pas de sens pour la théorie de l'intégration!).

$$\mathcal{F}1 = \delta \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\nu x}\, dx = \delta(\nu)$$

$$\mathcal{F}_x[e^{i2\pi a x}] = \delta_a \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi a x} e^{-i2\pi\nu x}\, dx = \delta(\nu - a)$$

Q: On s'autorise de noter les distributions comme des fontions, en particulier $\delta(. - a)$ pour δ_a.

- Récrire les transformées de Fourier et les convolutions avec des Dirac sous forme d'intégrales (même si les intégrales n'ont pas de sens pour la théorie de l'intégration!).

$$f \star \delta = f \qquad \int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(x-t)\,dt = f(x)$$

$$\delta \star f = f \qquad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)f(x-t)\,dt = f(x)$$

- Préciser les règles de manipulation pratique souvent utilisées pour le maniement de δ.

- Préciser les règles de manipulation pratique souvent utilisées pour le maniement de δ.
- Très utilisé en pratique:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\ dx = f(0) \qquad \text{(pour } f \text{ continue en } 0\text{)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-a)\ dx = f(a) \qquad \text{(pour } f \text{ continue en } a\text{)}$$

- Préciser les règles de manipulation pratique souvent utilisées pour le maniement de δ.
- Très utilisé en pratique:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\ dx = f(0) \qquad \text{(pour } f \text{ continue en } 0)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-a)\ dx = f(a) \qquad \text{(pour } f \text{ continue en } a)$$

- Utile aussi quelquefois (pour le physicien,. . .):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\ dx = \delta(\nu)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}2\pi(\nu-a)x}\ dx = \delta(\nu-a)$$

- Préciser les règles de manipulation pratique souvent utilisées pour le maniement de δ.
- Très utilisé en pratique:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)\,dx = f(0) \qquad \text{(pour } f \text{ continue en } 0\text{)}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a) \qquad \text{(pour } f \text{ continue en } a\text{)}$$

- Utile aussi quelquefois (pour le physicien,...):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}2\pi\nu x}\,dx = \delta(\nu)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}2\pi(\nu-a)x}\,dx = \delta(\nu-a)$$

- Ces intégrales n'ont **pas de sens pour la théorie de l'intégration**, il faut les comprendre comme des **distributions**.

Q: Retrouver simplement les transformées de Fourier des distributions suivantes (a et x_0 sont fixés dans $\mathbb{R}$):

$$T_1(x) = e^{\mathrm{i}2\pi a x}, \qquad T_2(x) = \delta(x - x_0)$$
$$T_3(x) = \cos(2\pi a x), \qquad T_4(x) = \sin(2\pi a x).$$

Q: Que vaut le produit $f\delta_a$ si f est une fonction continue en a?