TP Séparation de sources

Le but de ce TP est d'étudier des méthodes simples de séparation de sources.

1 Génération de sources et d'un mélange

Afin de mener l'étude des paragraphes 2 et 2.2, nous souhaitons générer des sources présentant certaines caractéristiques et un mélange de ces dernières.

1.1 Sources

On utilisera sous Python les générateur de variables aléatoires (voir dans `numpy.random` les générateurs de variable gaussienne `randn` ou uniforme `rand`,...).

1. - Générer un vecteur de T réalisations d'une variable aléatoire centrée, de variance unité et distribuée uniformément sur un intervalle (choisir une valeur de T convenable).
   - Calculer les valeurs théoriques des quatre premiers moments et cumulants d'une telle variable aléatoire. Quelle est la valeur du kurtosis (défini comme $\mathrm{C}_4\{s\} \triangleq \mathbb{E}\{s^4\} - 3\mathbb{E}\{s^2\}^2$)?
   - Mettre en œuvre les estimateurs de la moyenne empirique des moments et s'en servir pour estimer les moments et cumulants calculés théoriquement ci-dessus. Vérifier la cohérence des résultats.
2. Mêmes questions avec une variable aléatoire gaussienne et une variable aléatoire binaire ± 1 équiprobables.
3. On souhaite générer une variable aléatoire de kurtosis positif. On prendra une variable aléatoire de Laplace (ou encore distribution double exponentielle), centrée et de variance unité. Quelle est cette loi? Comment la générer? Reprendre les questions en 1 ci-dessus.

1.2 Mélange

Générer T réalisations d'un vecteur aléatoire de deux souces indépendantes que l'on pourra stocker dans une matrice $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{2\times T}$. Tirer une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ aléatoirement et réaliser le mélange $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ correspondant. Représenter les signaux et donner une image des distributions conjointes des sources et des observations (images présentées en cours: cf. transparents).

2 Approche par blanchiment et séparation orthogonale

L'approche suivie ici est basée sur un blanchiment suivi de la maximisation d'une fonction de contraste.

2.1 Blanchiment

1. Calculer la covariance empirique et théorique des sources et des observations; vérifier la cohérence des résultats.

2. Rappeler le principe du blanchiment et comment il peut se réaliser à l'aide de la décomposition en valeurs singulières. Mettre en œuvre un préblanchiment (chercher et utiliser la commande `svd`). Vérifier le résultat en calculant la covariance empirique des données blanchies. Donner une image de la densité de probabilité conjointe des données après blanchiment.

2.2 Quelques contrastes

L'étape de blanchiment effectuée, il reste à déterminer une matrice orthogonale. Nous comparons quelques contrastes, valables sous contrainte de blanchiment, et qui permettent d'effectuer cette tâche. Si $\mathrm{C}_4\{.\}$ désigne le cumulant d'ordre quatre, on considérera:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(\mathbf{y}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N} \left|\mathrm{C}_4\{y_i\}\right|, & \mathcal{C}_2(\mathbf{y}) &\triangleq -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{C}_4\{y_i\}, \\ \mathcal{C}_3(\mathbf{y}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N} \left(\mathrm{C}_4\{y_i\}\right)^2, & \mathcal{C}_4(\mathbf{y}) &\triangleq \sum_{i=1}^{N} \kappa_i \mathrm{C}_4\{y_i\}. \end{aligned}$$

où $\kappa_i = \mathrm{C}_4\{s_i\}$ pour tout i (les cumulants des sources sont alors supposés connus). Nous nous limiterons au cas $N = 2$ sources. Soit la matrice orthogonale paramétrée par l'angle θ:

$$\mathbf{Q}(\theta) \triangleq \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

1. Générer des sources uniformes et le mélange $\mathbf{y} = \mathbf{Q}(\theta)\mathbf{s}$.

2. Mettre en œuvre les estimateurs des fonctions de contraste ci-dessus sur une grille discrète de valeurs de θ (à choisir judicieusement en fonction du nombre T d'échantillons afin de ne pas imposer une charge de calcul trop importante).

3. Tracer la courbe des différents contrastes en fonction de θ.

4. Prendre des sources différentes (par exemple choisies dans celles suggérées dans la partie 1). Comparer les différents contraste, vérifier leur validité dans différents cas et commenter.

3 Approche par déflation: extraction d'une source

Dans cette partie, on considère un mélange carré de N sources par une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (tirée au hasard, loi absolument continue; possible de prendre $N > 2$). On adopte toujours le modèle d'observation: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$, où les composantes de $\mathbf{s}$ sont indépendantes, non gaussiennes. On supposera le vecteur $\mathbf{s}$ centré et chaque source de puissance unité ($\mathbb{E}\{\mathbf{s}\} = \mathbf{0}, \mathbb{E}\{\mathbf{s}\mathbf{s}^\top\} = \mathbf{Id}_N$).

Dans cette partie, nous souhaitons extraire une unique source. En d'autres termes, un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ est cherché tel que $\mathbf{b}^\top\mathbf{A}$ contient un unique terme non nul sur sa ligne: dans ce cas, $y = \mathbf{b}^\top\mathbf{x}$ correspond à l'extraction de la source où se situe le terme non nul. Une solution est donnée par la maximimisation suivante et sous contrainte du contraste $\mathcal{J}$:

$$\begin{aligned} &\text{max. } \mathcal{J}(\mathbf{b}) = \left|\frac{\mathrm{C}_4\{y\}}{(\mathbb{E}\{y^2\})^2}\right|^2 \qquad \text{où} \qquad y = \mathbf{b}^\top\mathbf{x} \\ &\text{s.t. } \mathbb{E}\{y^2\} = 1 \end{aligned}$$

On suppose que l'on dispose de T réalisations de $\mathbf{x}$, stockées dans $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_T]$ et on prendra les estimateurs empiriques des moments, dont les estimées donneront les estimations du cumulant $\mathrm{C}_4\{y\}$.

- Générer T échantillons de N sources (on pourra commencer par des sources binaires ± 1 équiprobables), tirer une matrices $\mathbf{A}$ et générer $\mathbf{X}$.
- Ecrire une fonction donnant une estimation de $\mathcal{J}(\mathbf{b})$.
- Ecrire une fonction donnant une estimation du gradient $\nabla\mathcal{J}(\mathbf{b})$.
- Ecrire une fonction permettant de maximiser de $\mathcal{J}$ par un algorithme de gradient projeté. En notant μ le pas de gradient, el principe est d'itérer, pour $k = 0, 1, \ldots$ les étapes:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}_k + \mu\nabla\mathcal{J}(\mathbf{b}_k) \\ \mathbf{b}_{k+1} &= \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\sqrt{\mathbb{E}\{(\tilde{\mathbf{b}}^\top\mathbf{x})^2\}}} \end{aligned}$$

- Tester l'algorithme écrit, d'abord avec un pas μ constant.
- Considérer la possibilité de choisir le pas de façon optimale par minimisation unidimensionnelle.

4 Application à des signaux sonores

1. Mettre en œuvre une séparation complète avec les différents types de sources proposées dans la partie 1. On effectuera un blanchiment suivi d'une détermination de l'angle de rotation. Pour la maximisation du contraste, on pourra se baser sur l'estimation de sa valeur réalisée précédemment sur une grille discrète.

2. Télécharger les signaux sonores disponibles sur ma page web[1]. Les mélanger par une matrice tirée aléatoirement, les séparer et comparer les sorties du séparateur aux sources (compte tenu du nombre d'échantillons, veiller à ne pas effectuer un trop grand nombre d'estimations du contraste).

[1] http://www-public.imtbs-tsp.eu/˜castella/index.php?page=enseignement