Exercices

SOMMAIRE

Exercices 85
1 Propriétés & DSP. 86
1.1 Modulation en bande de base.. 86
1.2 Codage NRZ, RZ 50%, Biphase. 87
1.3 Modulation étalée.. 88
1.4 Codages Différentiel et Bipolaire. 89
1.5 Modulations MDP et MSK.. 90
2 Détection. 91
2.1 Signaux Orthogonaux.. 91
2.2 Détection Vectorielle.. 92
2.3 Seuils de Détection Optimaux.. 93
2.4 Détection en Optique Cohérente.. 95
2.5 Modulation MAQ-8. 96
2.6 Modulation à Réponse Partielle. 97
3 Critère de Nyquist.. 98
3.1 Filtre Adapté. 98
3.2 Notion de Filtre Adapté... 99
3.3 Critère de Nyquist en Bande de Base.. 100
3.4 Diagramme de l'œil. Débits optimaux. 101
3.5 Calcul d'énergie. 102
3.6 Brouilleur sinusoïdal.. 102
4 Modulations sur Fréquence Porteuse... 103
4.1 Modulations en Phase et Quadrature. 103
4.2 Modulation M.S.K. 104
4.3 MDP2 Codée et 3MDF2. 105
4.4 Modulation Q^2PSK. 106
5 Canal Non Stationnaire. 107
5.1 Evanouissements par Trajets Multiples. 107
5.2 Canal de Rayleigh & Diversité.. 108
5.3 OFDM sur Canal Dispersif. 109
5.4 Diversité de Réception. 110

1 Propriétés & DSP.

1.1 Modulation en bande de base.

Les modulations numériques linéaires en bande de base sont caractérisées par la relation :
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \; g(t-kT)$ où $x(t)$ est le signal émis.

$\{a_k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d., qui représente la suite des symboles d'information à transmettre, à valeurs dans un alphabet $\mathcal{A}$ de M valeurs (M pair) :
$\mathcal{A} = \{ \pm A, \ \pm 3A, \ \pm 5A, \ ...., \ \pm(M-1)A\}$.
$D_s = \dfrac{1}{T}$ est le débit en symboles par seconde ou débit Bauds.

$g(t)$ est une fonction de mise en forme spectrale du signal $x(t)$, que l'on peut prendre normée (sans perte de généralité).

Pour simplifier la représentation du signal $x(t)$, nous choisirons pour fonction $g(t)$, la fonction rectangulaire normée:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{T}} & \text{pour } t \in [0,T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On définit la distance minimale entre les signaux par : $d_{\min}^2 = \min\limits_{i \neq j} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| s_i(t) - s_j(t) \right|^2 dt \right\}$.

① Représenter les signaux pour les suites de symboles suivantes :

$(\alpha_0 = \text{A}, \ \alpha_1 = \text{-}A, \ \alpha_2 = \text{-}A, \ \alpha_3 = A) \quad \& \quad (\alpha_0 = 3\text{A}, \ \alpha_1 = \text{-}A, \ \alpha_2 = \text{-}A, \ \alpha_3 = \text{-}3A)$

② Exprimer la relation entre le débit binaire D_b (bits/s) et le débit symbole D_s appelé aussi rapidité de modulation R (exprimée en bauds).

③ Pour A fixé, calculer en fonction de M, l'énergie moyenne par symbole, l'énergie moyenne par bit, la puissance émise et la distance minimale entre les signaux.

④ Pour une puissance émise et un débit binaire fixé, calculer, lorsqu'on fait varier de débit symbole, l'énergie moyenne par symbole et la distance minimale entre les signaux.

1.2 Codage NRZ, RZ 50%, Biphase.

Un signal numérique en bande de base, appelé code en ligne est représenté par la relation :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g_k(t-kT) \text{ et dans le cas de la MIA } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \, g(t-kT) \qquad (1.1)$$

On se propose de calculer la densité spectrale de puissance de différents codes en ligne.

Un signal NRZ, (Non Retour à Zéro) est défini par : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0,T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Un signal RZ 50%, (Retour à Zéro à la moitié) est défini par : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0,\frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Un code Manchester, est défini par les deux formes s_1, s_2, appliquées à du binaire :

$$s_1(t) = \begin{cases} A_0 & t \in [0,\frac{T}{2}] \\ A_1 & t \in [\frac{T}{2},T] \end{cases}$$

Un code Biphase, est un code Manchester avec : $A_1 = -A_0$ (forme de l'horloge) appliqué à du binaire symétrique $\{+1, -1\}$.

$$s_2(t) = \begin{cases} A_1 & t \in [0,\frac{T}{2}] \\ A_0 & t \in [\frac{T}{2},T] \end{cases}$$

$\{a_k\}$ est une suite de variables aléatoires, de probabilités a priori p & 1-p, indépendantes à valeurs dans : **a)** $a_k \in \{-1,+1\}$; **b)** $a_k \in \{0,1\}$.

Si $p = 1/2$ la suite I.I.D. (Indépendantes et Identiquement Distribuées) est de loi uniforme.

Pour les deux ensembles de valeurs **a)** et **b)** :

1) Quelle est la densité spectrale de puissance des codes NRZ et RZ50% ?

2) Quelle est la puissance du signal contenue dans les parties du signal ayant respectivement un spectre de raies et un spectre continu ?

3) Quelle est la densité spectrale de puissance du code Biphase ?

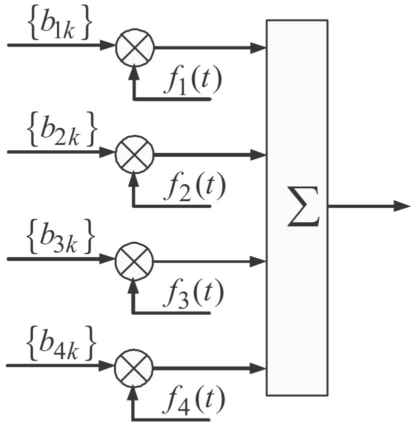
4) Comparer les DSP.

1.3 Modulation étalée.

On fait un multiplex de 4 voies de données $\{b_{ik}\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ de même débit $D_i = D_b = 1$ Mbit/s .

Les voies de données sont binaires $b_{ik} \in \{\pm 1\}$ i.i.d équiprobables et indépendantes entre elles.

Chaque voie est étalée spectralement en multipliant chaque bit par une séquence $f_i(t)$ de chips NRZ, ($f_1(t) = ++++$ pour la voie 1, $f_2(t) = +-+-$, $f_3(t) = ++--$, $f_4(t) = +--+$ pour la voie 4), puis les voies sont additionnées.



1. Quel est le débit symbole en sortie du modulateur ?
2. Quelle est l'énergie moyenne émise par symbole ? (préciser le calcul mathématique)

La transmission se fait sur un canal idéal BABG.

3. Quelle est la réponse impulsionnelle du filtre adapté de la voie *i* ?
4. Ce filtre vérifie-t-il les conditions de Nyquist de non IES ? (à justifier mathématiquement)

1.4 Codages Différentiel et Bipolaire.

Codage Différentiel.

$\{b_k\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,+1\}$ de probabilité a priori respectives :

$$\Pr(b_k = 1) = p \text{ et } \Pr(b_k = -1) = 1 - p.$$

La suite $\{a_k\}$ est crée à partir de la suite $\{b_k\}$ par un codage différentiel défini par la relation :

$$a_k = a_{k-1} \cdot b_k \tag{1.2}$$

1) Quelle est la fonction de corrélation de la suite $\{a_k\}$?

2) Quelle est la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ défini par (1.1) et (1.2) ?

On utilisera les fonction $g(t)$ RZ , NRZ et Horloge.

Codage Bipolaire.

Le code bipolaire RZ50%, à pour impulsion : $g(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

La suite binaire $\{b_k\}$ est une suite de symboles indépendants à valeurs dans $\{+1,-1\}$.

La suite ternaires $\{a_k\}$ prend ses valeurs dans $\{+1,0,-1\}$.

Les symboles a_k sont définis à partir des symboles b_k par un codage bipolaire :

$$\begin{cases} \text{si } b_k = +1 \text{ alors } a_k = \pm 1 \text{ altenativement} \\ \text{si } b_k = -1 \text{ alors } a_k = 0 \end{cases}$$

1) $p = \Pr(b_k = 1)$. Quelle est la fonction de corrélation de la suite $\{b_k\}$?

2) $p = 1/2$. Quelle est la densité spectrale du code bipolaire RZ50% ?

1.5 Modulations MDP et MSK.

On désire transmettre un signal numérique de débit 1 kbit/s sur un canal passe bande, de largeur 2 kHz. On utilise une modulation de Phase sans filtrage. La puissance émise est de 2 Watts.

1) La densité spectrale bilatérale de puissance du signal ne doit pas dépasser le niveau de – 45 dBW/Hz en dehors de la bande du canal.

- Quelle est la densité spectrale de puissance (DSP) d'une modulation de Phase ?

- Quelle est le niveau de la DSP à la fréquence de la porteuse ?

- Quelle est le niveau relatif des maxima des lobes secondaires de la DSP ?

- Quelle modulation de phase doit-on choisir ?

2) Sous cette même contrainte spectrale, on envisage d'utiliser la modulation MSK.

La modulation MSK, en équivalent en bande de base, est caractérisée par:

$$\alpha_x(t) = A \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k} g(t-2kT) + j \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k+1} g(t-(2k+1)T) \right) \right) \qquad a_k \in \{-1,+1\}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cos\frac{\pi t}{2T} \cdot \Pi_{2T}(t) \quad \text{soit} \quad G(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{4T\cos(2\pi fT)}{\pi \ \left(1-16T^2 f^2\right)}$$

- Montrez que la modulation M.S.K. est une modulation à enveloppe constante ?

- Quelle est sa densité spectrale ?

- Satisfait-elle les contraintes de densité spectrale hors bande?

3) Même question pour une modulation MAQ sans filtrage?

2 Détection.

2.1 Signaux Orthogonaux.

On cherche à concevoir un système de transmission qui utilise $M = 2^N$ signaux orthogonaux $s_i(t)$ $(i = 1,\ldots\ldots, M)$ de même énergie $E_s = \log_2(M)\cdot E_b$. (E_b est l'énergie pour transmettre un élément binaire). La suite binaire est i.i.d. et le codage est sans redondance.

La transmission est réalisée dans un canal de largeur de bande infinie, de gain unitaire et à bruit additif blanc Gaussien de densité spectrale bilatérale de puissance $N_0/2$.

1) Donner deux exemples de réalisation de cet ensemble de signaux.
2) Donner une représentation vectorielle $\mathbf{s}_i$ des signaux.
3) Exprimer la règle de décision du Maximum de Vraisemblance à posteriori.
4) Exprimer la probabilité de décision correcte. (Résultat sous forme intégrale)
5) Calculer la probabilité d'erreur dans le cas $M = 2$

   Montrer que la fonction d'erreur peut être majorée par : $\mathrm{Q}(y) \le \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$

6) En utilisant la borne de l'union, montrer que si $\frac{E_b}{N_0} > 2\ln 2$, alors $\lim\limits_{M\to\infty}\{\Pr(Err)\} = 0$.

7) Si les M signaux $s_i(t)$ sont de support $[0, T]$ et si l'on réutilise tous les T un ensemble de signaux décalés alors $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} g_k(t-kT) = \sum\limits_{k=-\infty}^{k=+\infty} s_{m,k}(t-kT)$, (le symbole $g_k(t)$ transmis sur l'intervalle de temps $[kT, (k+1)T]$ prend la valeur $g_k(t) = s_m(t)$).

   - Déterminer la largeur de bande minimale occupée par l'ensemble des M signaux.
   - Déterminer le débit binaire D_b et la rapidité de modulation R.
   - Déterminer l'efficacité spectrale η de la modulation (en bit/sec/Hz), conclusion.

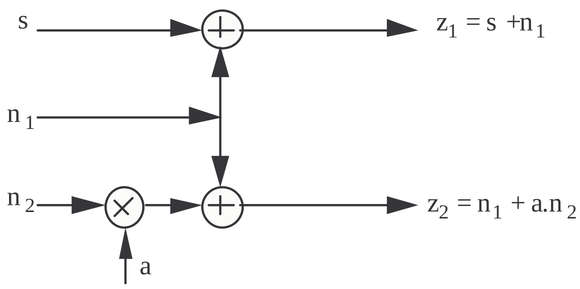
8) En utilisant le théorème de la capacité de canal : $C = B\log_2(1+\frac{P_s}{P_b})$

   P_s est la puissance du signal et P_b celle du bruit dans la bande B.

   - Montrer que si le débit est inférieur à la capacité $D_b < C$ alors $\frac{E_b}{N_0} > \ln 2$
   - Comparer avec le résultat obtenu à la question 6, lorsque $M \to \infty$.

2.2 Détection Vectorielle.

Soit le système de transmission suivant :



s est une variable aléatoire (v.a.) équi-distribuée à valeurs dans $\{-A, A\}$.

Les variables aléatoires n_1 et n_2 sont Gaussiennes, centrées, indépendantes entres elles et vis à vis de s et de même variance σ^2.

On observe le couple de variables aléatoires (z_1, z_2) et on cherche à déterminer la valeur prise par la variable ou signal s.

1) Exprimer le rapport de vraisemblance des deux valeurs de s.

2) Quel est le rôle joué par z_2

- Calculer la probabilité conditionnelle $\Pr\{z_1/(z_2, s)\}$

- Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}\{z_1/(z_2, s)\}$

- Exprimer la fonction de vraisemblance définie à la question précédente en fonction de cette espérance conditionnelle.

3) Quelle est la probabilité d'erreur ?

4) Même question si la décision s'effectue à partir de z_1 uniquement.

5) Quel est le récepteur linéaire à probabilité d'erreur minimale?

6) Conclusions.

2.3 Seuils de Détection Optimaux.

Soit la suite stationnaire bipolaire $\{a_k\}$ d'états successifs indépendants,

$a_k \in \{+1, 0, -1\}$ de probabilités respectives $p/2,\ 1-p,\ p/2$. (On fera varier p)

① On émet la suite $\{a_k\}$ sous la forme NRZ : $x(t) = \sum_k a_k g(t-kT)$, $g(t) = V \cdot \Pi_T(t - \frac{T}{2})$.

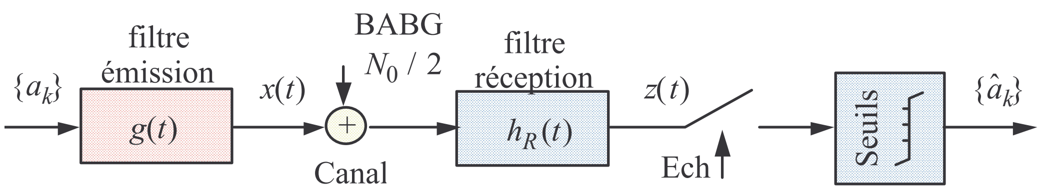
– Donner l'expression de la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ de $x(t)$.

– Ce signal possède-t-il de la puissance aux basses fréquences ?

– Véhicule-t-il le rythme symbole (raies à $1/T$ et ses harmoniques) ?

– Quelle est l'énergie par symbole E_s émise ?

② Le signal $x(t)$ traverse un canal sans distorsion à bruit additif blanc Gaussien centré de DSP bilatérale $N_0/2$. Il est en suite récupéré par un récepteur optimal classique où le filtre linéaire de réception $h_R(t)$ est le filtre adapté à un symbole. Suivant le schéma :



– Donner l'expression de $h_R(t)$ et de $z(t) = x(t) + b(t)$.

– Y-a-t-il de l'interférence entre symboles ?

– Quelle est la puissance de $b(t)$?

③ Le signal z(t) est échantillonné aux instants $t = kT + \theta$ de telle sorte que $z_k = z(kT+\theta) = a_k \cdot h(kT+\theta) + b(kT+\theta) = a_k \cdot h(0) + \beta$, où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre global de la chaîne de transmission.

– Quelle est la valeur de $h(0)$?

– Expliciter la loi de la variable aléatoire β puis celle de la variable aléatoire $(z_k / a_k = \alpha_i)$.

④ Pour décider des symboles $\hat{a}_k$ reçus le signal z_k est comparé à deux seuils (s_1, s_2).

On prendra : $s_1 = h(0) \cdot s_+$ et $s_2 = h(0) \cdot s_-$

La règle de décision étant : $\begin{cases} z_k > s_1 \rightarrow \hat{a}_k = +1 \\ z_k \in [s_2, s_1] \rightarrow \hat{a}_k = \;\; 0 \\ z_k < s_2 \rightarrow \hat{a}_k = -1 \end{cases}$

– Fonction de p, s_+ et s_- calculer la probabilité d'erreur de décision sur les symboles a_k.

– Etudier le cas $s = s_+ = s_-$.

– Déterminer, en fonction de p, les seuils s_+ et s_- qui minimisent la probabilité d'erreur par symbole $\Pr(Errs)$.

– De quel coté se déplacent les seuils lorsque p varie ?

– Pour $p = \dfrac{2}{3}$ présenter $\Pr(Errs)$ en fonction du rapport E_s / N_0 et en utilisant la fonction d'erreur complémentaire Erfc.

On rappelle que : $\dfrac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\dfrac{z - m_x}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_z^{+\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} dx$

et que $\mathrm{Erfc}(x) = 2 - \mathrm{Erfc}(-x) = \mathrm{Erf}(-x)$

2.4 Détection en Optique Cohérente.

On réalise un système de transmission sur fibre optique. La statistique du nombre de photons reçus, pendant la durée T de transmission d'un symbole, suit une loi de Poisson de paramètres λ_0 et λ_1 suivant les hypothèses H_0 ou H_1 qui correspondent respectivement à la transmission d'un symbole 0 et 1.

① Exprimer la probabilité d'observer n photons, si l'observation est un processus aléatoire stationnaire de Poisson de paramètre λ.

② Exprimer la moyenne et la variance du nombre de photons observé pendant la durée T.

③ Le rapport "signal sur bruit" est défini par le rapport du carré de la moyenne sur la variance. Comment s'exprime-t-il en fonction de λ.

④ Exprimer le critère de décision à Maximum de Probabilité a Posteriori (MAP)

- Montrer que le récepteur optimal compte les photons reçus.
- Déterminer le seuil de décision correspondant.
- Montrer que la probabilité d'erreur est minimale.

⑤ Exprimer le critère de décision à maximum de vraisemblance.

- Exprimer la probabilité d'erreur sous forme de sommes (H_0 et H_1 équiprobables).

⑥ Si $\lambda_o = 0$.

- Quelle valeur de λ_1 permet d'obtenir une probabilité d'erreur de 10^{-9} par élément binaire.
- Déterminer le nombre moyen de photons reçu par bit.

⑦ La puissance émise dans la fibre optique est de 1mW et le débit binaire de 1Gbit/s. L'atténuation d'une fibre optique mono-mode est de 0.1dB/km, la longueur d'onde est de $1{,}5\,\mu$m et l'indice de propagation $\eta = 1{,}5$.

Avec le récepteur ci-dessus :

- Déterminer la puissance moyenne reçue.
- Déterminer la distance maximale entre deux répéteurs.

⑧ Les récepteurs actuels fonctionnent avec un nombre moyen de 1000 photons par bit.

- Quel est, dans les mêmes conditions d'émission, la distance maximale entre deux répéteurs?

⑨ Conclusions.

2.5 Modulation MAQ-8.

On considère une modulation MAQ-8 particulière définie en équivalent en bande de base par la constellation :

$$d_k \in \left\{ A \cdot e^{j(2n+1)\frac{\pi}{4}} \right\} \cup \left\{ B \cdot e^{jm\frac{\pi}{2}} \right\}; \qquad \text{pour} \quad n,m = 0,1,2,3 \quad \text{et} \quad B > A > 0$$

L’impulsion de mise en forme spectrale est : $g(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi_T(t)$

1) Donner l’expression du signal $s(t)$ équivalent en bande de base et du signal réel $x(t)$ passe bande associé.

2) Déterminer la densité spectrale de puissance du signal équivalent en bande de base et du signal sur fréquence porteuse.

3) Déterminer l’énergie moyenne par symbole et par élément binaire du signal passe bande et du signal équivalent en bande de base.

4) Représenter sur le même diagramme la constellation et les régions de décisions du détecteur selon le maximum de vraisemblance.

5) Quelle est la distance minimale entre les signaux réels passe bande.

6) Trouver le rapport $\lambda = A / B$ qui maximise la distance minimale entre les signaux, pour une énergie moyenne par bit donnée.

7) Calculer la probabilité d’erreur par symbole puis par élément binaire.

8) Quel est le gain obtenu par rapport aux modulations MDP-2 et MAQ-4.
Quel est le gain obtenu par rapport à la modulation MDP-8, et à quel prix.

2.6 Modulation à Réponse Partielle.

La modulation à réponse partielle Duobinaire est définie par une modulation linéaire :

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m \, h(t - mT)$$

Les symboles $\{a_m\}$, $m \in \mathbb{Z}$ sont à valeurs dans $\{-1, +1\}$ et indépendants entre eux.

La fonction $h(t)$ à pour transformée de Fourier

$$H(f) = \begin{cases} \sqrt{A \cos(\pi f T)} & \text{pour } -\dfrac{1}{2T} < f < \dfrac{1}{2T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La transmission est réalisée dans un canal à bruit blanc additif gaussien (BBAG).

1) Quelle est la densité spectrale du signal émis?

2) Quelle est la puissance du signal $x(t)$ et l'énergie par bit émise E_b ?

3) Quel est le filtre de réception optimal associé à la transmission d'un seul symbole?

4) Exprimer le signal $z(t)$ à la sortie du filtre de réception.

5) Exprimer $z(t)$ aux instants kT et aux instants $kT - T/2$.

6) Quel instant d'échantillonnage vous paraît le plus approprié?

7) Donner un schéma de récepteur à retour de décision.

8) On réalise un codage différentiel à l'émission $a'_m = a'_{m-1} \cdot a_m$

Le signal émis est : $$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a'_m \, h(t - mT)$$

Donner la structure d'un récepteur à détecteur à seuils de la suite $\{a_m\}$.

9) Calculer la probabilité d'erreur et comparer avec celle d'une transmission binaire sur un canal à bruit blanc additif gaussien sans Interférence entre symboles (IES).

3 Critère de Nyquist.

(Voir exercice 1.3)

3.1 Filtre Adapté.

On dispose d'une source binaire : Hypothèse H_0 : La source émet le signal $x(t) = s(t)$.

Hypothèse H_1 : La source émet le signal $x(t) = -s(t)$.

On observe le signal $z(t) = x(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale bilatérale de puissance $S_b(f)$. Le récepteur est composé d'un filtre de réponse impulsionnelle $h_r(t)$ suivi d'un échantillonneur à l'instant τ. Soit $y(\tau)$ la variable obtenue $y(\tau) = r(\tau) + n(\tau)$

On définit le rapport signal sur bruit par : $\rho = \dfrac{r^2(\tau)}{\mathrm{E}\{\mathrm{n}^2(\tau)\}}$

On suppose que l'on est en bruit blanc : $S_b(f) = \dfrac{N_0}{2}$

1) Déterminer, en utilisant l'inégalité de Schwartz, la réponse en fréquence $H_r(f)$ du filtre de réception qui maximise le rapport signal sur bruit ρ.

2) Quelle est la particularité de la fonction $s(t) * h_r(t)$ ($*$ est le produit de convolution)

3) Que devient ce filtre si le bruit est de densité spectrale $S_b(f) \geq 0$ presque partout ?

4) Montrer que ce filtre peut se représenter par un filtre blanchissant suivi du filtre adapté en bruit blanc.

5) Quel est le filtre adapté (en bruit blanc) à une impulsion rectangulaire, à une impulsion sinusoïdale?

6) Donner les formes des signaux à la sortie du filtre de réception.

3.2 Notion de Filtre Adapté.

On considère une modulation numérique linéaire au débit $D_s = \frac{1}{T}$. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k h(t-kT)$.

$\{a_k\}$ est une suite binaire i.i.d. à valeurs $\{+A, -A\}$ équiprobables.

Soit $h(t)$ le filtre global sur la chaîne de transmission tel que sa fonction de transfert $H(f)$ soit :

$$H(f) = \begin{cases} \cos\frac{\pi f T}{2} & \text{pour } |f| \leq \frac{1}{T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1) $h(t)$ vérifie-t-il le critère de Nyquist ?

2) On filtre le signal $x(t)$ par le filtre adapté de réponse impulsionnelle $g(t) = h^*(-t)$ pour obtenir $y(t)$.

a) Calculer $G(f)$.

b) $g(t)$ vérifie-t-il le critère de Nyquist ?

c) L'impulsion filtrée est $r(t) = h(t) * g(t)$. Vérifie-t-elle le critère de Nyquist ?

3)

a) Quelle est la densité spectrale de puissance $S_x(f)$ du signal $x(t)$?

b) Quelle est la largeur de bande à 3dB de la DSP du signal $x(t)$?

c) Quelle est la largeur de bande à 3dB de la DSP du signal $y(t)$?

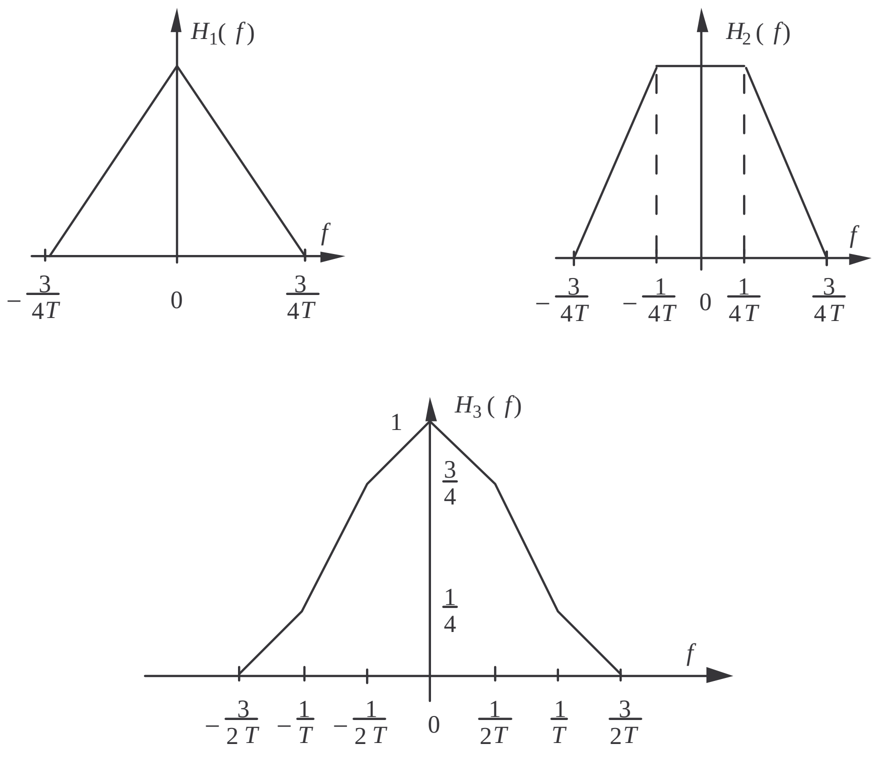
3.3 Critère de Nyquist en Bande de Base.

On considère une liaison binaire au débit D_b bits/sec. Pour effectuer une transmission sans interférence entre symboles (IES), il est nécessaire que le filtrage global du canal satisfasse le critère de Nyquist.

1) Rappeler ce critère.

2) Préciser, pour chacun des trois canaux, de fonction de transfert globale $H_1(f)$, $H_2(f)$ et $H_3(f)$ représentée ci-dessous, si ils permettent une transmission sans IES au débit binaire $D_b = \frac{1}{T}$.

3) Préciser, pour chacun des trois canaux, le débit D_b maximum qu'il est possible de transmettre sans IES.



Fonctions de transfert globale des canaux de transmission.

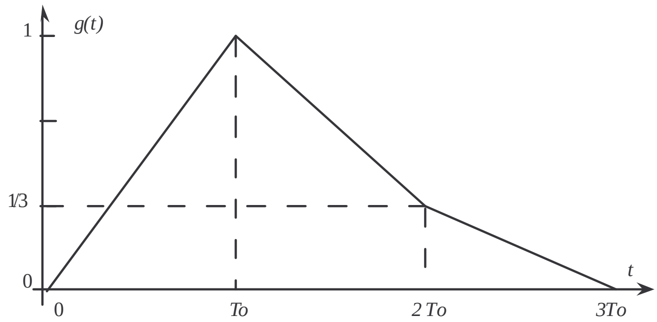
3.4 Diagramme de l'œil. Débits optimaux.

On considère un système de transmission au débit symbole $\frac{1}{T}$ sur un canal à bruit additif blanc Gaussien.

Le signal reçu à la sortie du filtre de réception, avant échantillonnage, s'écrit :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k g(t - kT) + b(t) \quad \text{avec} \quad a_k \in \{-1, +1\}$$

$g(t)$ est défini par :



1) On suppose $T = 2T_0$.

   Représentez le diagramme de l'oeil correspondant au débit $\frac{1}{T}$.

   Peut-on échantillonner le signal $x(t)$ sans interférence entre symboles ?

2) On augmente le débit symbole tel que $T = T_0$.

   Comment se modifie le diagramme de l'oeil ?

   Quel instant d'échantillonnage minimise l'effet de l'interférence entre symboles ?

3.5 Calcul d'énergie.

On désire transmettre le signal $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k g(t-kT)$, au débit binaire $D_b = 9600$ bit/s.

Le canal est à Bruit Blanc Additif Gaussien.

Les symboles a_k sont à valeurs dans $\{-1,+1\}$, indépendants et équiprobables.

$$g(t) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi t}{T} & \text{pour } t \in [0,T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1) Quelle est la densité spectrale du signal émis ?

2) Quelle est l'énergie émise par symbole ?

3) Quelle est la largeur de bande minimale pour transmettre sans interférence entre symboles?

4) On suppose que le filtre global de la chaîne de transmission vérifie le critère de Nyquist pour le débit symbole $\frac{1}{T}$. On désire multiplier par deux le débit binaire sans modifier le filtrage. Peut-on transmettre sans interférence entre symboles ? Quelle modulation peut-on utiliser ? Que deviennent les énergies émises par bit et par symbole ?

3.6 Brouilleur sinusoïdal.

Soit un canal téléphonique de bande passante [300, 3400 Hz] sur lequel une onde sinusoïdale de 3000 Hz perturbe la transmission.

On désire transmettre au débit de 9600 bit/s à l'aide d'une modulation MAQ.

1) Quelle modulation choisir ?

2) Montrer que l'on peut réaliser une transmission sans interférence entre symboles non perturbée par le brouilleur.

3) Quel est le facteur de débordement maximum ?

4 Modulations sur Fréquence Porteuse.

4.1 Modulations en Phase et Quadrature.

Une MAQ, modulation d'amplitude des porteuses en phase et en quadrature est définie par :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k h(t-kT)\cdot\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k h(t-kT)\cdot\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$$

où $h(t)$ est une fonction dont la transformée de Fourier est donnée par :

$$H(f) = \begin{cases} A\cdot\cos\left(\dfrac{\pi f}{2B}\right) & \text{pour} \quad -B < f < B \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les symboles a_k et b_k sont indépendants et prennent des valeurs équiprobables dans l'ensemble $\{\ \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots.,\ \pm(M-1)\}$ pour une modulation MAQ-M^2.

Le signal observé est $z(t) = x(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale bilatérale de puissance $S_b(f) = N_0/2$.

La fréquence de la porteuse est $f_0 = 800$ MHz.

La largeur de bande du canal est de 24 MHz centré sur la fréquence de la porteuse.
La densité spectrale de puissance du bruit est $N_0 = 0{,}01\ \mu\text{w}/_{\text{Hz}}$.
Le débit binaire est de $D_b = 144$ Mb/s.

1) Représenter un schéma de principe de la chaîne de transmission.

2) Déterminer le filtre de réception optimal.

3) Déterminer le débit baud qui permet de transmettre sans IES.

4) Quelle modulation MAQ choisir ?

5) En utilisant les courbes de probabilité d'erreur du polycopié, déterminer l'énergie par bit nécessaire pour transmettre avec un Taux d'Erreur par élément binaire inférieur à 10^{-6}.

6) Déterminer la densité spectrale de puissance du signal émis.

4.2 Modulation M.S.K.

La modulation M.S.K. (Minimum Shift Keying) est une modulation sur fréquence porteuse en Phase et en Quadrature décalée. Le signal réel est modélisé par :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k} h(t-2kT) \cdot A\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k+1} h(t-(2k+1)T) \cdot A\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$$

Son enveloppe complexe associée à la fréquence f_0 et à la phase $\phi = 0$ est définie par :

$$\alpha_x(t) = A \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k} h(t-2kT) + j \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_{2k+1} h(t-(2k+1)T) \right) \right) \qquad a_k \in \{-1,+1\}$$

$h(t)$ est la fonction de mise en forme de la modulation M.S.K. qui est définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi t}{2T} & \text{pour } t \in [-T,+T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La modulation F.F.S.K. (Fast Frequency Shift Keying) est une modulation de fréquence à phase continue d'indice 0.5 définie par :

$$x(t) = A \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi h \int_0^t s(u)du\right); \quad h = 1/2 \quad \text{est l'indice de modulation.}$$

Avec : $$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_k\, g(t-kT); \quad d_k \in \{-1,+1\}; \quad g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2T} & \text{pour } t \in [0,T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1) Montrer que la M.S.K. est une modulation à enveloppe constante.

2) Calculer la densité spectrale du signal M.S.K.

3) Déterminer les fréquences instantanées du signal F.F.S.K.

4) Tracer l'évolution de la phase du signal F.F.S.K. en fonction du temps (arbre des trajectoires de phases ($\phi(t)$ pour toutes les suites de symboles possibles)).

5) Montrer que les modulations F.F.S.K. et M.S.K. sont équivalentes à un codage par transition près.

6) Déterminer la densité spectrale du signal F.F.S.K. .

4.3 MDP2 Codée et 3MDF2.

On considère une suite binaire $\{b_k\}$ à éléments successifs indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1,0\}$. Le débit binaire est de 1Mbit/s.

MDP2.

La suite binaire $\{b_k\}$ est transmise par une MDP2, la puissance émise est de 1Watt.
Le canal est à BABG et le récepteur est optimal cohérent.

1) Quelle est la largeur de bande à 3dB si l'impulsion de mise en forme est :
   a) NRZ, b) en racine de cosinus surélevé de facteur de débordement $\alpha = 0.2$?
2) Quelle est l'énergie moyenne émise par bit et quelle est la distance entre les formes émises?
3) Quelle est la probabilité d'erreur par bit à la réception ?

On code la suite binaire $\{b_k\}$ par un code de Hadamard $\mathbf{H}_4$.

Les mots de code ont 4 bits, ce sont les lignes des matrices $\mathbf{H}_4$ et $\overline{\mathbf{H}_4}$, le dernier bit est un contrôle de parité des trois premiers, le rendement est de $r = 3/4$.

La matrice se construit suivant la règle $\mathbf{H}_1 = [0]$; $\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{H}_{2^{n+1}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}_{2^n} & \mathbf{H}_{2^n} \\ \hline \mathbf{H}_{2^n} & \overline{\mathbf{H}_{2^n}} \end{array}\right]$.

La suite de sortie $\{d_k\}$ est telle que $d_k \in \pm 1$ (les zéros sont transformés en -1).

Elle est transmise par la MDP2 du 1°), les erreurs sont détectables mais non corrigibles, on considère qu'en cas d'erreur sur un mot un seul bit sera restitué faux.

4) Quelle est la distance minimale entre les mots du code ?
5) Quelle est la probabilité d'erreur sur les mots de code en décision dure ?
6) Quelle est la probabilité d'erreur sur les bits après décodage ?

3MDF2.

La suite binaire $\{b_k\}$ est maintenant transmise par une modulation sur trois porteuses orthogonales (à 2 états) et <u>émises simultanément</u>. La puissance moyenne émise est toujours de 1Watt.

7) Quelle est la largeur de bande à 3dB si l'impulsion de mise en forme est NRZ ?
8) Dessiner la constellation du signal avec un codage de Gray.
9) Quelle est l'énergie moyenne émise par bit et quelle est la distance entre les formes émises?
10) Quelle est la probabilité d'erreur par bit ? (Canal BABG et récepteur optimal cohérent) (Utiliser la borne de l'union).

4.4 Modulation Q2PSK.

On considère une suite binaire $\{b_m\}$ à éléments successifs indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{\pm 1\}$. Le débit binaire est de 10Mbit/s.

Cette suite binaire $\{b_m\}$ est transmise par une modulation Quadrature-Quadrature PSK, un symbole est formé à partir de quatre bits d'après le schéma ci-dessous.

Le signal émis s'écrit

$$x(t) = \sum_k \left(\sum_{i=1}^{4} b_{4k+i} \cdot s_i(t-kT) \right)$$

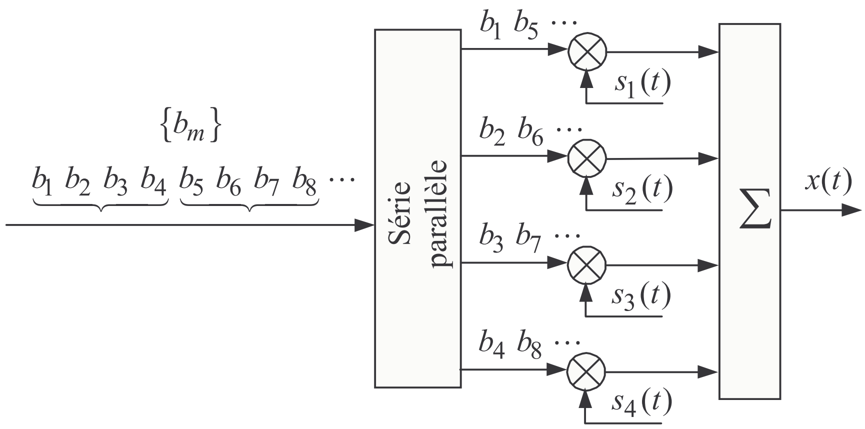
$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \leq T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \leq T$$

$$s_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \leq T$$

$$s_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t), \text{ pour } |t| \leq T$$

(T est la période symbole) ($f_0 = 1\text{GHz}$)



1) Montrer que les signaux, $s_i(t)$, sont orthogonaux.

2) Quelle est l'énergie moyenne émise par bit.

3) Quelle est l'enveloppe complexe $\alpha_x(t)$, par rapport à f_0, de $x(t)$?

4) Ecrire $\alpha_x(t)$ sous la forme $\sum_k \left(a_{1k} g_1(t-kT) + a_{2k} g_2(t-kT)\right)$ et en déduire sa DSP.

5) Comparer l'efficacité spectrale de la QQPSK à celle de la MSK.

6) Décrire la constellation de cette modulation, un codage de Gray est -il possible?

7) Donner la représentation vectorielle et déterminer la distance minimale entre les points en fonction de l'énergie moyenne par symbole.

8) La transmission se fait dans un canal idéal BABG, le récepteur est optimal cohérent. Donner la structure du récepteur (schéma).

9) Calculer un majorant de la probabilité d'erreur par bit résiduelle. (Borne de l'union).

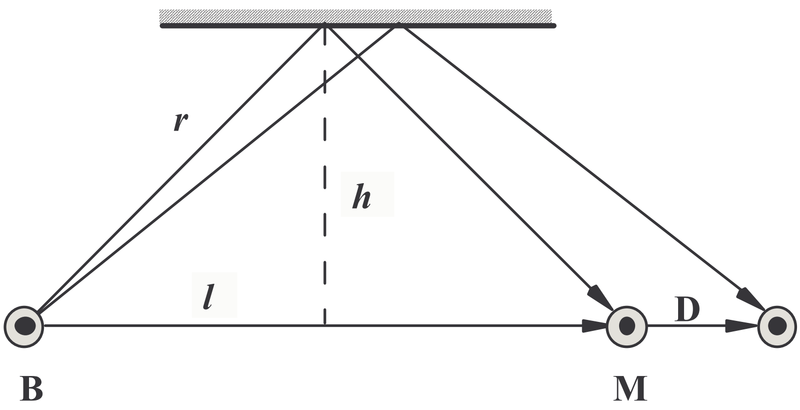
10) Calculer la probabilité d'erreur résiduelle exacte. Comparer à la MAQ-4.

11) AN : $P_e = 1$ mW. Affaiblissement 40 dB. $N_0 = -170$ dBW/Hz .

5 Canal Non Stationnaire.

5.1 Evanouissements par Trajets Multiples.

D'après la figure ci-dessous le mobile M reçoit, de la station de base B, un trajet direct de longueur l et un trajet réfléchi de longueur ρ. A l'instant t le mobile reçoit par le trajet direct le signal $x_d(t) = \mathrm{Re}\left\{ s(t)\, e^{j\omega_0 t} \right\}$, où $s(t)$ représente l'enveloppe complexe (par rapport à f_0) qui est le signal d'information.



① En appelant τ la différence de temps de propagation, quelle est, à l'instant t, l'enveloppe complexe $r(t)$, du signal reçu par le mobile, lorsque le trajet réfléchi est présent.

② Calculer, en fonction de l et de h, la différence de marche $d = \rho - l$ entre les deux trajets, puis la différence de temps de propagation τ (la célérité du milieu est : $c = 3 \cdot 10^8 m/s$).

③ Quelles conditions sur $s(t)$ et τ, doit on avoir pour que $s(t) \# s(t-\tau)$?

④ En supposant $s(t) \# s(t-\tau)$, donner l'expression de $r(t)$ en fonction de $s(t)$, de τ et des affaiblissements α_0 et α_1 des deux trajets. Puis , dans le cas $\alpha_0 = \alpha_1$, celle de $|r(t)|^2$ en fonction de d et λ_0.

On choisit : $f_0 = 3\text{GHz}$, $f_M = 1\text{MHz}$, $h = 20\text{m}$, $l = 200\text{m}$ puis $l = 1000\text{m}$.

Vérifier que l'approximation $s(t) \# s(t-\tau)$ est valable.

⑤ En fonction de l, tracer l'évolution de $|r(t)|^2$ au voisinage de $l = 200\text{m}$ puis $l = 1000\text{m}$.

(on fera l'approximation $h/l << 1$). On regardera le cas $\alpha_1 = \alpha_0 / 2$.

⑥ Quel est le temps entre deux évanouissements pour un mobile se déplaçant à 50km/h, pour $l = 200\text{m}$ puis $l = 1000\text{m}$.

5.2 Canal de Rayleigh & Diversité.

On désire réaliser la transmission d'une modulation MDP2 dans un canal de Rayleigh non sélectif de coefficient $c = \rho e^{j\theta}$ avec $E\{|c|^2\} = 2\sigma^2$.

Le canal est a bruit additif blanc gaussien de DSP $N_0/2$.

1) Donner la structure du récepteur et le schéma du canal discret équivalent sous la forme :
$$y_n = c \cdot d_n \cdot \sqrt{E_b} + b_n$$

2) Quelle sont les performances de ce système de transmission en fonction du rapport signal sur bruit moyen : $\gamma = E\left\{ |c|^2 \cdot \dfrac{E_b}{N_0} \right\} = \dfrac{2\sigma^2 E_b}{N_0}$

Qu'est ce que la diversité, quels sont les types de diversité envisageable sur un canal non stationnaire.

3) Diversité d'ordre 2 par combinaison de canaux en Réception .

On cherche à améliorer les performances de ce système en plaçant deux antennes de réception distantes de quelques longueurs d'onde. Les deux canaux de Rayleigh de coefficients c_1 et c_2 sont indépendants et de même variance $E\{|c_1|^2\} = E\{|c_2|^2\} = 2\sigma^2$. Ils sont non dispersifs et les évanouissements sont supposés lents.

3-1) Quelle est la structure du récepteur optimal, selon le critère du maximum de vraisemblance?

3-2) Quelle est la loi du rapport signal sur bruit E_b/N_0 à l'entrée du récepteur?

3-3) Quelles sont les performances du système? Valeur asymptotique lorsque $\gamma >> 1$.

4) Diversité de réception par sélection de trajet.

Pour simplifier le récepteur on décide de choisir le récepteur le plus puissant pour réaliser la détection. Donner l'expression de la probabilité d'erreur?

Donner l'expression de sa valeur asymptotique lorsque $\gamma >> 1$.

Comparer ce résultat avec celui du récepteur optimal. Quelle est la perte en performances?

5) Diversité d'émission.

On réalise une diversité d'émission. Quel est le rapport signal à bruit en réception?

5-1) Quelles sont les performances obtenues?

5.3 OFDM sur Canal Dispersif.

On considère des voies de données, au débit de 100 kbit/s, à transmettre sur un canal dispersif.
Ce canal présente un temps de dispersion $T_{disp} = 1\mu s$ et un temps de cohérence $T_{coh} = 10ms$.

On réalise un multiplex OFDM de N porteuses orthogonales, de fréquences $f = f_0 + n\Delta f$ pour $n = 1, 2, ..., N$ et $f_0 = 1\text{GHz}$. Les porteuses sont modulées MAQ-4.

1. Quelles sont les conditions d'orthogonalités des porteuses ?
2. Quel est l'étalement Doppler du canal ? Quelle est la largeur de sa bande de cohérence?

On décide de prendre des symboles d'une durée $T_s = 10 \cdot T_{disp}$ et un écartement en fréquence $\Delta f = 1/T_s$ pour un multiplex de 50 porteuses en cosinus.

3. Quel est le nombre maximal de voies de données qu'on peut transmettre avec ce système ?
4. Quelle est la largeur de bande utile ?
5. Si l'on veut faire de la diversité en fréquence quel est l'espacement minimal entre deux porteuses transportant la même information?

On choisit de faire de la diversité dans le temps mettant un seul codeur linéaire en bloc, codeur de Golay (23,12,7), et un entrelacement des bits codés.

6. Quel est le nombre maximal de voies de données qu'on peut transmettre avec ce système ?
7. Quel est l'écart temporel nécessaire entre deux bits d'un même mot de code pour réaliser la diversité entre ces bits ?
8. Quelle doit être la dimension de l'entrelaceur ?
9. Quel est le nombre d'erreurs que peut corriger le codeur ?
10. Quelle est la structure complète (du signal reçu aux voies restituées) du récepteur optimal cohérent ?

5.4 Diversité de Réception.

On considère l'émission MDP-2 (1Mbit/s, 1Watt) sur un canal de Rayleigh. La réception est faite par trois antennes (i=1,2,3), suffisamment espacées, et le récepteur est optimal.

Le fading est lent, le BABG est le même sur les trois voies ($N_0 = -180\text{dBW/Hz}$) et les affaiblissements instantanés $c_{i,n}$ suivent la même loi gaussienne complexe de composantes $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = -100\text{dB}\right)$.

1) Donner la structure du récepteur optimal au minimum de probabilité d'erreur.

2) Quel est le rapport signal à bruit moyen γ d'un canal, valeur littérale et numérique ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un au moins des trois canaux présente un S/B instantané $\gamma_{i,n}$ supérieur à 13dB ?

4) Etablir la loi du rapport signal à bruit instantané γ_n de l'ensemble.

5) Quelles sont alors les probabilités d'erreur, par bit, instantanée et moyenne ?

6) Comparer alors la probabilité d'erreur moyenne au cas sans diversité, valeurs numériques.